

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В.Н. Каразина

На правах рукописи

МИХАЙЛЕНКО ВЛАДИМИР ВЛАДИМИРОВИЧ

УДК 533.951

**Немодальная теория устойчивости
сдвиговых течений плазмы**

01.04.08 – физика плазмы

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико–математических наук

Научный руководитель:
Азаренков Николай Алексеевич,
доктор физико–математических наук,
профессор

ХАРЬКОВ – 2005

Оглавление

Введение.	5
1 Временная эволюция дрейфовых волн в однородном сдвиговом течении неоднородной столкновительной плазмы.	19
1.1 Введение.	19
1.2 Модель и уравнения.	21
1.3 Бесстолкновительная плазма. Начальная задача для линеаризованного уравнения Хасегавы–Мима в случае однородного сдвигового течения.	25
1.4 Столкновительная плазма. Немодальная эволюция резистивной дрейфовой неустойчивости.	34
1.4.1 Слабостолкновительная плазма.	34
1.4.2 Сильностолкновительная плазма.	40
1.5 Законы сохранения.	42
1.6 Временная эволюция вынужденных возмущений дрейфовых волн в полуграниченном сдвиговом течении плазмы.	45
1.7 Выводы.	47
2 Временная эволюция дрейфово–альфвеновских волн в однородном сдвиговом течении неоднородной плазмы с холодными ионами	51
2.1 Введение.	51
2.2 Основные уравнения.	53
2.3 Временная эволюция альфвеновских волн в однородной плазме низкого давления ($\beta \ll m_e/m_i$).	57

2.3.1	Временная эволюция плотности энергии альфвеновских волн в сдвиговом течении однородной плазмы низкого давления ($\beta \ll m_e/m_i$) с холодными ионами.	59
2.4	Временная эволюция альфвеновских волн в плазме с умеренным давлением ($1 \gg \beta \gg m_e/m_i$) и холодными ионами.	61
2.4.1	Однородная плазма с холодными ионами.	63
2.4.2	Неоднородная плазма с холодными ионами.	68
2.5	Временная эволюция несобственных альфвеновских волн в полуграниченном сдвиговом течении плазмы.	71
2.5.1	Вынужденные альфвеновские волны в плазме низкого давления ($\beta \ll m_e/m_i$).	73
2.5.2	Вынужденные альфвеновские волны в плазме умеренного давления ($1 \ll \beta \ll m_e/m_i$).	74
2.6	Выводы	81
3	Временная эволюция дрейфово–альфвеновских неустойчивостей в однородном сдвиговом течении плазмы с горячими ионами.	84
3.1	Гидродинамическая дрейфово–альфвеновская неустойчивость сдвигового течения плазмы.	84
3.2	Резистивная дрейфово–альфвеновская неустойчивость сдвигового течения плазмы.	87
3.3	Эволюция дрейфово–альфвеновских волн в плазме с горячими ионами в режиме сильного шира скорости.	90
3.4	Выводы.	92
4	Неустойчивость Рэлея–Тейлора в сдвиговом течении плазмы	94
4.1	Введение.	94
4.2	Основные уравнения.	96
4.3	Линейная немодальная эволюция неустойчивости Рэлея–Тейлора.	100
4.4	Нелинейная немодальная эволюция неустойчивости Рэлея–Тейлора.	102

4.5	Законы сохранения	105
4.6	Временная эволюция вынужденных возмущений в полуограниченном сдвиговом течении плазмы, при наличии неустойчивости Рэля–Тейлора.	107
4.7	Выводы.	111
	Заключение.	114
	Литература.	118

Введение.

Исследование удержания плазмы в тороидальных магнитных системах (токамаках, стеллараторах и др.), предназначенных для осуществления управляемого термоядерного синтеза, является одним из основных направлений в современной физике плазмы. Уже в начале экспериментальных исследований удержания плазмы в тороидальных системах было обнаружено, что потери плазмы происходят гораздо быстрее, чем это ожидалось по теории, основанной на модели бинарных столкновений заряженных частиц [1]. Это известно теперь как явление аномального переноса плазмы [2]. Изучению аномального переноса плазмы, являющегося одним из серьезнейших препятствий к осуществлению управляемого термоядерного синтеза, было посвящено огромное количество экспериментальных и теоретических исследований (см., например, обзор [3]). Экспериментально было обнаружено, что с увеличением вводимой в плазму энергии для ее нагрева удержание плазмы, как правило, ухудшается. В связи с этим оказалось весьма неожиданным обнаружение в 1982 г. на токамаке ASDEX (Германия) явление перехода плазмы в режим улучшенного удержания [4], [5] в результате дополнительного нагрева плазмы инъекцией пучков нейтралов. Впоследствии режимы улучшенного удержания плазмы в токамаках были обнаружены и при применении других методов нагрева.

Новый режим удержания характеризовался ростом времени удержания плазмы, формированием на краю плазмы в $2 \div 4$ см от сепаратрисы крутых градиентов плотности плазмы и температуры ионов и электронов. Переход от обычного режима удержания, который был назван как L – («low»), к режиму улучшенного удержания, названного как H – мода («high»), происходил быстро (менее чем за 1 мсек) и возникал при превышении порога вводимой мощности.

Этот переход происходил независимо как от метода нагрева, так и от геометрии магнитного поля. Было обнаружено, что этот переход требует достаточно большой энергии, используемой для нагрева плазмы. Пороговое значение энергии растет с ростом плотности, напряженности удерживающего магнитного поля и размеров токамака.

Эксперименты, проведенные на токамаках ASDEX [5], Dublet-IIIID [6], TEXT [7] и др. показали, что одновременно с возникновением режима улучшенного удержания и уменьшения уровня флуктуаций на краю плазмы возникает радиально неоднородное электрическое поле и обусловленное им полоидальное вращение плазмы. Область сильного сдвигового течения совпадала по радиусу с областью подавления флуктуаций.

Возник вопрос о взаимосвязи процесса подавления флуктуаций и сдвигового течения. Было неясно что происходит: радиально неоднородное электрическое поле и связанное с ним сдвиговое течение является результатом улучшения удержания плазмы, или подавление флуктуаций, уменьшение аномального переноса и улучшение удержания энергии и частиц плазмы является результатом воздействия сдвигового течения плазмы на турбулентность плазмы. Опыты, проведенные на токамаке DIII-D четко указали [6] на следующую последовательность событий: сначала формируются достаточно крутые градиенты электрического поля, затем подавляется турбулентность, укучаются профили плотности и температуры на краю плазмы – возникают так называемые транспортные барьеры, ограничивающие перенос частиц и тепла из плазмы. Транспортный барьер проявляет повторное формирование и исчезновение, приводя к пульсационным потерям частиц и тепла на краю плазмы. Этот процесс называют локализованными на краю модами (Edge Localized Modes, ELM) [8]. Подавление флуктуаций происходит через несколько миллисекунд после спонтанного возникновения радиального неоднородного электрического поля. Этот эксперимент установил, что именно сдвиговое течение на краю плазмы является причиной подавления низкочастотных флуктуаций и аномального переноса частиц и тепловой энергии плазмы. Другая серия экспериментов, которая также указала на неоднородное ради-

альное электрическое поле как на причину улучшения удержания плазмы, была выполнена на токамаке TEXTOR – 94. В этих экспериментах неоднородное радиальное электрическое поле на краю плазмы прикладывалось дополнительно и контролировалось в эксперименте. (R.R. Weynats, G. Van Oost et al. Nucl.Fusion, 32, p.837 (1992)). Эти эксперименты показали, что решающим фактором в подавлении флуктуаций и улучшения удержания плазмы является величина градиента скорости $|dv_0/dr|$ полоидального дрейфа в скрещенных полях, $\mathbf{v}_0 = c [\mathbf{E}_r \times \mathbf{B}_0] / B_0^2$. Величина $dv_0(r)/dr$ по установившейся терминологии называется широм скорости. Этот термин будет использоваться и в тексте диссертации.

После открытия режима улучшенного удержания, который получил название H – мода, были обнаружены и другие режимы с еще большим временем удержания плазмы [9].

Важно отметить, что сдвиговые течения плазмы характерны также для ионосферы и магнитосферы Земли. Натурные измерения в ионосфере токов и электрических полей указали на существование в ионосфере неоднородностей полей и течений плазмы с характерными масштабами изменения скорости течения от многих десятков километров до нескольких метров [10]. Такие неоднородные течения существуют во всех областях ионосферы от полярных зон, где развиваются полярные сияния, и до экваториальных зон. Сдвиговые течения в ионосфере являются важным источником свободной энергии, необходимой для нагрева и переноса ионосферной плазмы до высот магнитосферы. Данные, полученные от спутников отмечают сильную корреляцию между существованием структурированных течений в ионосфере, широкополосной турбулентностью и нагревом компонентов плазмы [10]. Эти результаты стимулировали многочисленные исследования сдвиговых течений вдоль и поперек магнитного поля на лабораторных установках.

Открытие связи шира скорости течения плазмы с подавлением низкочастотной турбулентности и связанного с ней аномального переноса стимулировало многочисленные экспериментальные и теоретические исследования устойчивости плазмы со сдвиговым течением. В настоящее время развиваются два на-

правления в теоретических исследованиях влияния сдвигового течения на турбулентность плазмы. Первое направление [11] основано на концепции усиленной нелинейной декорреляции турбулентности сдвиговым течением. Было получено [11], что связь полоидального неоднородного вращения с турбулентной диффузией по направлению градиента скорости приводит к уменьшению характерного временного масштаба декорреляции возмущений плазмы, который в этом случае становится гибридом диффузионного и сдвигового временных масштабов. Эта усиленная декорреляция ведет к подавлению турбулентности и улучшенному удержанию плазмы. Теория основана на перенормированных уравнениях для двухточечных корреляционных функций потенциалов [11, 13, 14]. Физика подавления турбулентности вследствие явления усиленной декорреляции такова. В отсутствии шира скорости турбулентность можно характеризовать коэффициентом аномальной диффузии D и радиальной корреляционной длиной Δ . Эти величины определяют время корреляции $\tau_1 = \Delta^2 / D$, которое является временем, за которое элемент турбулентной плазмы продиффундирует длину корреляции, т.е. $\langle \delta r^2(\tau_1) \rangle / \Delta^2 = D\tau_1 / \Delta^2 = 1$. При наличии сдвига скорости, однако, рассеяние по радиусу и растяжение по полоидальному углу оказывается связанным. Так, если $dy/dt = V_\theta(r)$, то смещение элемента плазмы δy в полоидальном направлении определяется как $\frac{d\delta y}{dt} = \frac{dV_\theta(r)}{dr} \delta r$, так что $\delta y = \int \frac{dV_\theta(r)}{dr} \delta r dt$ и $\langle \delta y^2 \rangle = \left(\frac{dV_\theta(r)}{dr} \right)^2 D \tau^3$. Поэтому индуцированное широм скорости время корреляции τ_c определяется как $k_\theta^2 \langle \delta y^2(\tau_c) \rangle = 1$, так что $\tau_c = \left(k_\theta^2 D \left(\frac{dV_\theta(r)}{dr} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{3}}$. Когда $\tau_c < \tau_1$ именно τ_c является характерным корреляционным временем турбулентности. Это происходит, когда

$$\left(k_\theta^2 D \left(\frac{dV_\theta(r)}{dr} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{3}} < \frac{\Delta^2}{D}, \quad \text{т.е. когда} \quad k_\theta \frac{dV_\theta(r)}{dr} \cdot \Delta > \frac{D}{\Delta^2}$$

Полагая [11], что неустойчивость в плазме без сдвигового течения насыщается, когда $D = \gamma \Delta^2$, условие

$$\left| k_\theta \frac{dV_\theta(r)}{dr} \cdot \Delta \right| > \gamma$$

дает критерий насыщения турбулентности сдвиговым течением вследствие эффекта усиленной декорреляции. Если полагать, что $k_\theta \Delta \sim 1$, то получаем упрощенный часто используемый критерий (см. например [12])

$$\left| \frac{dV_\theta(r)}{dr} \right| > \gamma.$$

Нелинейное моделирование [15] показало полную стабилизацию неустойчивости при выполнении этого критерия, если в качестве инкремента γ используется максимальный инкремент для всех низкочастотных (с частотой ω значительно меньших ионной циклотронной частоты) неустойчивостей.

Второе направление основано на линейной теории устойчивости сдвиговых течений плазмы. В этой группе работ сдвиговое течение рассматривается как фактор уменьшающий линейный инкремент и подавляющий развитие неустойчивости. Кроме того линейная теория может оказаться важным компонентом для теории нелинейной декорреляции. Возникновение в линейной теории пространственной неоднородности и параметра dv_0/dr с размерностью частоты приводит к изменению частот и структуры неустойчивых мод. Это, в свою очередь, влияет на статистические свойства турбулентности плазмы, такие как длина корреляции, скорость декорреляции, турбулентную диффузию и др.

В линейной теории устойчивости сдвиговых течений плазмы, основанной на использовании дрейфового приближения к двухжидкостной магнитогидродинамике, как и в теории устойчивости сдвиговых течений обычной жидкости, применяются, как правило, два подхода. Первым и наиболее часто употребляемым подходом является метод нормальных мод или модальный подход. В этом методе возмущения неоднородного вдоль оси x течения, направленного вдоль осей y или z , предполагаются гармоническими во времени с зависящей от координаты x амплитудой т.е. $\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(x) \exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z)$, где $\phi(x)$ называют структурой моды. Как в случае жидкости так и плазмы при этом подходе возникает дифференциальное уравнение для $\phi(x)$, имеющее сингулярности в критических слоях, где фазовая скорость возмущений совпадает со скоростью течения $V_{0y}(x)$, т.е. где $\omega = k_y V_{0y}(x)$. Эти уравнения оказываются несамосопряженными, собственные функции, определяемые этими уравнениями являются неортогональны-

ми. Вследствие этого реальная эволюция во времени отдельной пространственной гармоники Фурье требует учета интерференции всех гармоник разложения в ряд Фурье начального возмущения. Причиной этого является то, что любая гармоника деформируется сдвиговым течением, изменяя при этом со временем волновой вектор, частоту и амплитуду возмущений. Поэтому такой подход, хотя и дает правильный ответ на вопрос о существовании неустойчивости, неприменим для анализа насыщения неустойчивости сдвиговым течением. В этой ситуации более правильным оказывается решение начальной задачи. Для решения начальной задачи об устойчивости сдвигового течения жидкости Кейзом [16] и Диким [17, 18] было использовано преобразование Лапласа. В теории плазмы этот подход был применен Тимофеевым [19, 20, 21]. Важным результатом этого подхода является то, что в дополнение к дискретным собственным значениям ω , связанным с нормальными модами, был обнаружен непрерывный спектр собственных значений. Его эффект проявляется в том, что начальные возмущения могут затухать или даже расти как немодальные возмущения со степенной зависимостью от координаты и времени у экспоненциального множителя. Такая немодальная эволюция для определенных значений времени становилась определяющей даже для экспоненциально растущих мод дискретного спектра и всегда доминировала над экспоненциально затухающими модами.

Несмотря на то, что метод Лапласа дает формально полное решение начальной задачи, аналитически вычислить обратное преобразование Лапласа и тем самым определить временную эволюцию начальных возмущений плазмы удаётся только для асимптотически больших значений времени. Эти асимптотические результаты, однако, имеют ограниченную практическую ценность, поскольку они не позволяют выявить все промежуточные процессы и характерные времена их возникновения. Следствие этого оказывается невозможным и сравнительный анализ важности линейных и нелинейных факторов на временную эволюцию сдвигового течения плазмы. Поэтому можно полагать, что несмотря на значительные усилия теоретические исследования сдвигового течения плазмы всё ещё находится в начальном состоянии. Это состояние обусловлено в частности сложностью и несо-

вершенством математических методов, используемых при этих исследованиях. Поэтому **разработка новых методов аналитического исследования сдвиговых течений плазмы, возникающих в режиме улучшенного удержания плазмы, и их применение для исследования низкочастотных волн и неустойчивостей дрейфового типа, которые являются ответственными за аномальный перенос частиц и энергии плазмы, является актуальной задачей современной теории плазмы.**

Ещё в 1887 году Лордом Кельвиным был предложен иной подход [22] к решению начальных задач для безграничного течения жидкости с постоянным широм, $v'_0(x) = \text{const}$. Подход Кельвина состоит в преобразовании независимых пространственных переменных из лабораторной системы отсчета в систему отсчета, движущуюся вместе с течением, и исследовании временной эволюции отдельных пространственных мод Фурье возмущений. Эти моды отличаются от мод, возникающих в обычном модальном подходе. В лабораторной системе отсчета их частота и амплитуда оказываются зависящими от времени вследствие учета при этом деформации отдельных мод сдвиговым течением (см. рис.). Только при малых временах временная зависимость у этих мод может сохраниться как модальная. Этот немодальный подход, использованный Кельвином для изучения эволюции начальных возмущений в параллельных вязких течениях с однородным широм скорости, был успешно применен к исследованию стратифицированного сдвигового течения [23], волн Россби в сдвиговом течении [24], магнитогиродинамических волн [25, 26] и электростатических ленгмюровских волн и вихрей в плазме с постоянным широм скорости [27].

До настоящего времени, однако, немодальный подход не был применен для исследования низкочастотной турбулентности дрейфового типа в плазме со сдвиговым течением.

Практическая важность такого исследования состоит в том, что именно дрейфовая турбулентность является ответственной за аномальный перенос частиц и тепла плазмы, удерживаемой тороидальным магнитным полем. **Целью настоящей диссертации является аналитическое исследование низкоча-**

стотных волн и неустойчивостей дрейфового типа в сдвиговом течении плазмы на основе немодального подхода. Цель диссертации достигается путем решения следующих задач:

- Построение теории временной эволюции дрейфовых волн и резистивной дрейфовой неустойчивости сдвигового течения плазмы.
- Построение теории временной эволюции альфвеновских и дрейфово-альфвеновских волн в сдвиговом течении плазмы с холодными ионами.
- Построение теории временной эволюции дрейфово-альфвеновских неустойчивостей в сдвиговом течении плазмы с горячими ионами.
- Построение теории линейной и нелинейной эволюции неустойчивости Рэлея-Тейлора в сдвиговом течении плазмы.

Научная новизна полученных результатов. В диссертации впервые использован так называемый немодальный подход для исследования низкочастотных волн и неустойчивостей дрейфового типа сдвигового течения плазмы.

1. Впервые получено точное решение уравнения Хасегавы-Мима, которое описывает дрейфовые волны в случае однородного сдвигового течения плазмы. Получено, что общепринятое синусоидальное (модальное) решение для дрейфовых волн имеет место только в течение ограниченного времени. Для произвольного времени решение является существенно немодальным, которое с ростом времени преобразуется в решение, которое описывает конвективную ячейку с нулевой частотой.
2. Впервые исследована динамика пакетов дрейфовых волн в сдвиговом течении плазмы. Показано, что пакеты дрейфовых волн отражаются от определенного критического уровня и плазма становится непрозрачной для аномального переноса плазмы.
3. Первые на основе модели Хасегава-Вакатани исследована временная эволюция резистивной дрейфовой неустойчивости плазмы и дрейфовых волн

в плазме с сильными и слабыми столкновениями. Определено условие подавления неустойчивости сдвиговым течением. Показано, что в состоянии подавления (насыщения) дрейфовой неустойчивости дрейфовые волны являются принципиально немодальными (за счет деформации волн сдвиговым течением) и процесс стабилизации дрейфовой неустойчивости является немодальным и не может быть правильно исследован на основе общепризнанного модального подхода.

4. Впервые исследована эволюция альфвеновских и дрейфово–альфвеновских волн в неоднородном сдвиговом течении плазмы с холодными ионами. Как в случае плазмы низкого давления ($\beta \ll m_e/m_i$), так и в случае плазмы умеренного давления ($1 \gg \beta \gg m_e/m_i$) решения для альфвеновских волн и дрейфово–альфвеновских волн являются немодальными с волновым вектором и частотой, которые изменяются во времени. Получено, что со временем фазовая скорость альфвеновских волн в сдвиговом течении плазмы становится близкой к электронной тепловой скорости, что ведет на конечной стадии эволюции альфвеновских волн к их сильному поглощению вследствие затухания Ландау на электронах. Показано, что сдвиговое течение плазмы со временем становится непроницаемым для альфвеновских волн.
5. Впервые исследовано влияние сдвигового течения плазмы на резистивную дрейфовую и гидродинамическую альфвеновские неустойчивости плазмы. Показано, что эти альфвеновские неустойчивости быстро становятся немодальными с инкрементом, который растет со временем. Однако только в случае сильного сдвига скорости, когда градиент скорости поперек течения (так называемый шир скорости) становится сравнимым с частотой альфвеновской волны, линейные немодальные эффекты могут привести к подавлению этих неустойчивостей.
6. Впервые проведены исследования влияния немодальных эффектов на слабонелинейную эволюцию неустойчивости Рэля–Тейлора. Определены условия при которых нелинейные немодальные возмущения (включительно до

четвертого порядка относительно амплитуды начальных возмущений) становятся затухающими, стабилизируя при этом неустойчивость Рэлея–Тейлора как в линейном, так и в слабонелинейном режиме.

Практическое значение полученных результатов. Применённый в диссертации немодальный подход оказался наиболее практичным и плодотворным для анализа устойчивости сдвиговых течений плазмы. Именно на этой основе в диссертации удалось решить начальные задачи о временной эволюции дрейфовых, альфвеновских волн и неустойчивостей, а также неустойчивости Рэлея–Тейлора, в сдвиговом течении плазмы. Применение немодального подхода дало возможность установить в явном виде законы изменения во времени потенциалов, возмущений плотности и давлений компонентов плазмы для любых значений времени (а не только для асимптотически больших значений как в обычно используемом методе Лапласа). Эти результаты позволили провести сравнительный анализ немодальных и нелинейных эффектов в процессе эволюции неустойчивостей и установить характерные структуры и времена их формирования для дрейфовых, альфвеновских волн в сдвиговом течении плазмы. Именно эти структуры, в которых учтено искажение форм волн сдвиговым течением, а не обычно используемые плоские волны, должны быть использованы для построения теории турбулентности сдвигового течения плазмы.

Благодаря проведенному анализу впервые установлено, что насыщение дрейфово – резистивной неустойчивости и неустойчивости Рэлея–Тейлора в сдвиговом течении плазмы являются сугубо немодальными процессами, которые ранее не удавалось обнаружить на основе общепринятого модального анализа. Впервые обнаружено сугубо немодальное явление блокировки волновых пакетов дрейфовых и альфвеновских волн, которое должно учитываться в теории формирования транспортных барьеров.

Персональный вклад соискателя состоит в решении сформулированных задач, проведении аналитических расчетов, анализе литературных источников, участии в совместном анализе и обсуждении полученных результатов, написании статей и докладов по теме диссертации.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты исследований по теме диссертации докладывались на следующих международных конференциях: «IAEA Technical Committee Meeting on First Principle Based Transport Theory» June 21 – 23, 1999, Kloster Seeon, Germany; 9th International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Alushta (Crimea), Ukraine, September, 13–18, 2002; 10th International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Alushta (Crimea), Ukraine, September, 13–18, 2004.

Публикации. В основу текста диссертации положены результаты, полученные в шести опубликованных статьях, и трех докладах на конференциях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав основного текста, выводов и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 124 страниц и 17 рисунков, расположенных на этих страницах. Список используемой литературы состоит из 68 наименований.

Краткое содержание диссертации.

Эксперименты показывают [3], что в плазме токамака наибольший уровень флуктуаций плотности плазмы возникает в краевых областях плазмы, где её температура достаточно низкая. В этих областях затухание Ландау дрейфовых волн на электронах или ионах оказывается менее важным чем их столкновительное затухание. В работе Хасегавы и Вакатани [28] была предложена нелинейная система уравнений для потенциала самосогласованных электростатических возмущений и возмущений плотности ионов, которая описывает нелинейную стадию электростатической дрейфово–резистивной неустойчивости. Эта система уравнений в линеаризованном виде позволяет учесть влияние сдвигового течения на эволюцию дрейфово–резистивной неустойчивости в условиях характерных для краевого слоя плазмы токамака.

В Главе 1 диссертации на основе этой системы уравнений исследуется временная эволюция дрейфовых волн в сдвиговом течении неоднородной столкновительной плазмы. В разделе 1.2 рассмотрен предельный случай бесстолкновительной плазмы. В этом случае система Хасегавы–Вакатани приводится к уравнению

Хасегавы–Мима. Впервые получено точное решение этого уравнения для любых интервалов времени, которое для конечных не малых интервалов времени является немодальным. Только в пределе малых времен из этого решения получаем модальное решение, определяющее дрейфовую волну. При достаточно больших значениях времени решением уравнения Хасегавы–Мима оказывается решение типа конвективной ячейки с нулевой частотой. Исследуется пространственная и временная эволюция волновых пакетов, составленных из полученных немодальных решений. Показывается, что вследствие немодальности, обусловленной сдвиговым течением, распространение таких волновых пакетов блокируется сдвиговым течением, их групповая скорость как вдоль неоднородности течения, так и вдоль течения, за конечное время обращается в нуль.

Гораздо более сложным оказывается решение начальной задачи о эволюции дрейфовых волн при учете столкновений. Рассмотрены отдельно два случая: случай достаточно редких столкновений, при котором возможно возникновение дрейфово–резистивной неустойчивости, и случай частых столкновений. Определены условия, при которых происходит подавление дрейфово–резистивной неустойчивости сдвиговым течением. Показано, что в условиях подавления неустойчивости дрейфовые волны являются немодальными. В случае сильностолкновительной плазмы или сильного шира скорости решение начальной задачи, проведенное в разделе 1.4.2, показывает, что решения для электростатического потенциала становятся немодальными даже при малых значениях времени. В разделе 1.5 исследована эволюция энергии и энтропии дрейфовых волн в плазме со сдвиговым течением. Временная эволюция вынужденных дрейфовых волн в полуограниченной плазме со сдвиговым течением исследована в разделе 1.6. Выводы к Главе 1 приведены в разделе 1.7.

В Главе 2 временная эволюция дрейфово–альфвеновских волн в неоднородной плазме низкого и конечного давления с однородным сдвиговым течением исследована как начальная задача без использования спектрального разложения по времени. Случаи плазмы с холодными и горячими ионами, слабым и сильным сдвиговым течением рассматриваются отдельно. В разделе 2.2 получены основные

уравнения, описывающие временную эволюцию дрейфовых альфвеновских волн в неоднородной плазме с однородным сдвиговым течением. Эти уравнения получены на основе дрейфового приближения для уравнений двухжидкостной магнитогидродинамики [52, 53]. Исходя из экспериментальных данных предполагается, что характерная длина L_v радиального градиента скорости является значительно меньшей, чем характерная длина радиального градиента удерживающего магнитного поля L_B . Поэтому удерживающее магнитное поле предполагается бесшировым и однородным. В разделах 2.3 и 2.4 получены решения начальной задачи для различных интервалов времени и прослежена эволюция дрейфовых и альфвеновских волн в плазме с холодными ионами, $T_i \ll T_e$. В разделе 2.3 исследована эволюция во времени «инерциальной» альфвеновской волны в сдвиговом течении плазмы низкого давления, для которой ($\beta \ll m_e/m_i$). Временная эволюция «кинетических» альфвеновских волн в однородной (раздел 2.4.1) и неоднородной (раздел 2.4.2) плазме конечного давления, ($1 \gg \beta \gg m_e/m_i$), с холодными ионами ($T_i \ll T_e$) исследована в разделе 2.3. В разделе 2.5 исследована временная эволюция несобственных вынужденных альфвеновских волн в в сдвиговом течении полубесконечной, $x \geq 0$, плазмы при наличии гармонического возмущения, приложенного на границе плазмы $x = 0$. Случаи плазмы низкого давления ($\beta \ll m_e/m_i$) и конечного давления ($1 \gg \beta \gg m_e/m_i$) рассмотрены, соответственно, в разделах 2.5.1 и 2.5.2. Показано, что сдвиговое течение приводит к немодальной эволюции не только решения для альфвеновских волн, полученных для плазмы без границ, но и решения для вынужденных волн, вызываемых возмущениями на границе и модифицированными как сдвиговым течением, так и альфвеновскими волнами, распространяющимися в сдвиговом течении плазмы.

В Главе 3 рассмотрена плазма с горячими ионами, для которой температуры ионов T_i и электронов T_e сравнимы, $T_i \leq T_e$. В такой плазме возможно развитие гидродинамической дрейфово–альфвеновской неустойчивости и резистивной дрейфово–альфвеновской неустойчивости. В разделе 3.1 рассмотрена эволюция гидродинамической дрейфово–альфвеновской неустойчивости в плазме со сдвиговым течением, а в разделе 3.2 – резистивной дрейфово–альфвеновской неустой-

чивости в случае, когда градиент скорости сдвигового течения значительно меньше частоты альфвеновской волны, $k_{\parallel}v_A \gg v'_0$. Показано, что хотя в этом случае на временах $t \geq (v'_0)^{-1}$ неустойчивости становятся немодальными с растущим во времени инкрементом, сдвиговое течение не приводит к подавлению вышеуказанных неустойчивостей. Случай сильного сдвигового течения с градиентом скорости $v'_0 \gg k_{\parallel}v_A$ рассмотрен в разделе 3.3. Получено, что в этом случае начальные возмущения оказываются устойчивыми относительно развития в однородном сдвиговом течении плазмы дрейфово-альфвеновских неустойчивостей.

Исследованию временной эволюции неустойчивости Рэлея–Тейлора и условий ее подавления в плазме со сдвиговым течением посвящена Глава 4 диссертации. В разделе 4.2 получены основные нелинейные уравнения, которые описывают эволюцию во времени как линейных возмущений, возбужденных вследствие развития неустойчивости Рэлея–Тейлора в плазме со сдвиговым течением, так возмущений плазмы, возникающих благодаря нелинейности. Исследованию линейной немодальной эволюции неустойчивости Рэлея–Тейлора посвящен раздел 4.3. Исследованию совместного действия немодальности и нелинейности на временную эволюцию неустойчивости Рэлея–Тейлора в плазме со сдвиговым течением посвящен Раздел 4.4. В разделе 4.4 исследовано эволюцию неустойчивости Рэлея–Тейлора в полубесконечном сдвиговом течении, занимающем область $x \geq 0$, при наличии гармонического возмущения, приложенного к границе плазмы $x = 0$. Выводы по этой Главе приведены в разделе 4.6.

В Заключение кратко сформулированы основные результаты диссертации.

Глава 1

Временная эволюция дрейфовых волн в однородном сдвиговом течении неоднородной столкновительной плазмы.

1.1 Введение.

Аномальный перенос на границе плазмы в тороидальных устройствах, как давно уже установлено экспериментально и теоретически (см, например, обзор П. Левиер [3]), вызваны низкочастотными электростатическими колебаниями дрейфового типа. Поэтому изучение влияния радиального сдвигового электрического поля и сдвиговых течений на дрейфовую турбулентность и аномальный перенос частиц и тепла плазмы являются критически важными для понимания физики «L–H» перехода.

Аналитические исследования временной эволюции дрейфовых волн в сдвиговых течениях основываются, как правило, на традиционном спектральном разложении по времени и последующем анализе собственных значений и собственных функций соответствующих дифференциальных операторов. Это так называемый метод нормальных мод или модальный подход, в котором возмущение электростатического потенциала рассматривается в виде синусоидальных по времени волн. В плоско–слоистой модели плазмы с зависимостью скорости сдвигового течения направленного вдоль оси y от координаты x , потенциал берется в виде $\phi = \phi(x) \exp(iky - i\omega t)$. В этом случае уравнения, описывающие модальную структуру возмущений, $\phi(x)$, обычно являются не самосопряженными уравнениями [29, 30]. Собственные функции, связанные с этими уравнениями не являются взаимно ортогональными и испытывают сильную интерференцию. Физической

причиной такой связи мод является непрерывная деформация волн сдвиговым течением, которая фактически не учитывается в модальном подходе, которая приводит к зависимости от времени волновых векторов, частот и амплитуд волн. Поэтому анализ устойчивости плазмы, основанный на рассмотрении отдельных собственных значений, может дать неадекватное описание происходящих процессов. Другой метод решения начальной задачи – использование преобразования Лапласа. Однако обратное интегральное преобразование Лапласа, которое формально полностью решает начальную задачу, может быть вычислено как правило только для асимптотически больших значений времени. Это предполагает, что другие методы решения проблемы временной эволюции потенциала должны быть применены. В этой главе, представлен так называемый немодальный подход к решению начальной задачи для дрейфовых возмущений в плазме с постоянным сдвигом скорости, которое не основывается на спектральном разложении по времени или преобразовании Лапласа. Сущность немодального подхода, предложенного Кельвином [22], состоит в переходе независимых пространственных переменных из лабораторной системы отсчета в конвективную систему отсчета со сдвиговым течением и изучения временной эволюции пространственных возмущенных Фурье мод. Эти моды отличаются от мод фигурирующих в обычном модальном подходе. Волновое число и амплитуда связанные с такой модой в лабораторной системе отсчета являются зависящими от времени.

В этой главе, основанной на работах [31, 32, 33, 34], мы рассматриваем временную эволюцию дрейфовых волн и резистивной дрейфовой неустойчивости в однородном сдвиговом течении плазмы на основе немодального приближения. Мы используем плоскостую модель Хасегавы и Вакатани [28]. Эта система уравнений не является нормальной [29, 30], ее собственные функции не являются взаимно ортогональными. Получено, что при наличии сдвигового течения решения системы уравнений Хасегавы–Вакатани оказываются немодальными для временных масштабов и параметров типичных для токамаков. В разделе 1.2 получено основное уравнение определяющие временную эволюцию электростатического потенциала для резистивных дрейфово–волновых возмущений. В разделе 1.3 по-

лучено немодальное решение уравнения Хасегавы–Мима, которое возникает из системы Хасегавы–Вакатани в предельном случае бесстолкновительной плазмы и адиабатичных электронов. В разделе 1.4 рассмотрено немодальное решение системы Хасегавы–Вакатани в случае слабой резистивности вдоль магнитного поля или слабого шира скорости. Противоположный случай сильной резистивности или сильного сдвигового течения рассмотрен в разделе 1.5. Выводы приведены в разделе 1.6.

1.2 Модель и уравнения.

Модель резистивной дрейфовой турбулентности была предложена в работе Хасегава и Вакатани [28]. Исходными уравнениями при получении системы уравнений Хасегавы–Вакатани являются уравнение движения ионной компоненты поперек магнитного поля,

$$m_i \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \right) = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_0] \right) - \frac{1}{n} \nabla p_i, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (1.1)$$

уравнение непрерывности ионов,

$$\frac{dn_i}{dt} = -n_i \operatorname{div} \mathbf{v}_i \quad (1.2)$$

а также уравнение движения электронов вдоль магнитного поля

$$j_{\parallel} = \frac{1}{en_e \eta_{\parallel}} \left[-en_e \frac{\partial \varphi}{\partial z} + T_e \frac{\partial n_e}{\partial z} \right] = \frac{T_e}{e \eta_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{n_{e1}}{n_0(x)} - \frac{e\varphi}{T_e} \right), \quad (1.3)$$

где $\eta_{\parallel} = \frac{\nu_{ei} m_e}{n_e e^2}$ – удельное сопротивление плазмы вдоль магнитного поля, ν_{ei} – частота электрон–ионных столкновений. В уравнении (1.3) мы положили $m_e = 0$ и $\nabla T_e = 0$. Система уравнений (1.1)–(1.3) приводится к системе уравнений Хасегавы–Вакатани для возмущений плотности электронов \tilde{n} и электростатического потенциала φ . Для безразмерных возмущений плотности $n = \tilde{n}/n_e$ и потенциала $\phi = e\varphi/T_e$ (n_e равновесная плотность электронов), эта система имеет следующий вид [28]:

$$\rho_s^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \nabla^2 \phi = a \frac{\partial^2}{\partial z^2} (n - \phi), \quad (1.4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right) n + v_* \frac{\partial \phi}{\partial y} = a \frac{\partial^2}{\partial z^2} (n - \phi), \quad (1.5)$$

где

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_0(x) + \frac{c}{B^2} [\mathbf{B} \times \nabla \varphi] \quad (1.6)$$

– дрейфовая скорость, $a = T_e/n_0 e^2 \eta_{\parallel}$, ρ_s – ионный ларморовский радиус с электронной температурой, $v_* = ckT_e/eB$ – диамагнитная дрейфовая скорость, $\kappa = -d \ln n_{0e}(x)/dx$. Мы рассматриваем случай течения с постоянным широм, для которого

$$\mathbf{v}_0(x) = \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}_0(x) \times \mathbf{B}] = v'_0 x \mathbf{e}_y \quad (1.7)$$

и v'_0 не зависит от x . Для этого случая вычисления значительно облегчаются в результате использования новых координат, определяемых соотношениями [23]

$$\tau = t, \quad \xi = x, \quad \eta = y - v_0(x)t = y - v'_0 x t, \quad z = z. \quad (1.8)$$

Переход к этим координатам соответствует переходу в систему координат, движущуюся со сдвиговым течением плазмы. В новых пространственных координатах линеаризованная система (1.4), (1.5) выражается в виде

$$\rho_s^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - v'_0 \tau \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 \right] \phi = a \frac{\partial^2}{\partial z^2} (n - \phi), \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} + v_* \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = a \frac{\partial^2}{\partial z^2} (n - \phi). \quad (1.10)$$

Для рассматриваемой задачи начальные условия имеют вид:

$$\phi(\tau = 0, \xi, \eta, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint dk_{\perp} dl dk_z e^{i(k_{\perp} \xi + l \eta + k_z z)} \phi(0, k_{\perp}, l, k_z), \quad (1.11)$$

$$n(\tau = 0, \xi, \eta, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint dk_{\perp} dl dk_z e^{i(k_{\perp} \xi + l \eta + k_z z)} n(0, k_{\perp}, l, k_z). \quad (1.12)$$

Выполним преобразование Фурье в уравнениях (1.9), (1.10) по координате z с осью z направленной вдоль магнитного поля. Тогда систему уравнений (1.9) и (1.10) можно привести к следующему уравнению для потенциала $\phi(t, \xi, \eta, k_z)$:

$$\rho_s^2 \frac{\partial}{\partial \tau} (\Delta_{\perp c} \phi) - \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - v_* \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \frac{\rho_s^2}{a k_{\parallel}^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (\Delta_{\perp c} \phi) = 0, \quad (1.13)$$

где

$$\Delta_{\perp c} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - v'_0 t \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2. \quad (1.14)$$

Отметим, что система (1.9), (1.10), а также уравнение (1.13) не содержат коэффициентов, зависящих от пространственных переменных. Выполним преобразование Фурье в уравнении (1.13) по переменным ξ и η ,

$$\phi(\tau, k_{\perp}, l, k_z) = \iiint d\xi d\eta dz e^{-i(k_{\perp}\xi + l\eta + k_z z)} \phi(\tau, \xi, \eta, z) \quad (1.15)$$

Тогда получим из уравнения (1.13) следующее уравнение для возмущения электростатического потенциала $\phi(\tau, k_{\perp}, l, k_z)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_s^2}{ak_z^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[\left(1 + \left(\frac{k_{\perp}}{l} - v'_0 \tau \right)^2 \right) \phi \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \left[1 + l^2 \rho_s^2 \left(1 + \left(\frac{k_{\perp}}{l} - v'_0 \tau \right)^2 \right) \right] \phi \right\} + ilv_* \phi = 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Удобным оказывается использование в уравнении (1.16) безразмерного времени T , определенного соотношением

$$T = v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l}. \quad (1.17)$$

Тогда уравнение (1.16) принимает вид

$$\frac{1}{C} \frac{\partial^2}{\partial T^2} [(1 + T^2) \phi] + \frac{\partial}{\partial T} \{ [1 + l^2 \rho_s^2 (1 + T^2)] \phi \} + i \frac{lv_*}{v'_0} \phi = 0, \quad (1.18)$$

где параметр C равен

$$C = \frac{ak_z^2}{\rho_s^2 l^2 v'_0} = \frac{T_e k_z^2}{\rho_s^2 l^2 v'_0 n_0 e^2 \eta_{\parallel}}. \quad (1.19)$$

Уравнение (1.16) и начальные условия,

$$\phi(T = -k_{\perp}/l, k_{\perp}, l, k_z) = \phi(0, k_{\perp}, l, k_z), \quad (1.20)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial T} \right|_{T = -\frac{k_{\perp}}{l}} = \frac{l^2}{k_{\perp}^2 + l^2} \left(2 \frac{k_{\perp}}{l} \phi(0, k_{\perp}, l, k_z) + C n(0, k, l, k_z) \right), \quad (1.21)$$

которые следуют из уравнений (1.9), (1.11) и (1.12), составляют начальную задачу, которая является объектом нашего исследования в этой главе.

При отсутствии внешнего неоднородного электрического поля, т.е. когда $v'_E = 0$, уравнение (1.16) является уравнением с постоянными коэффициентами. Положив $\phi(\omega) = \int dt e^{i\omega t} \phi(t)$ из (1.16), получаем ($K_{\perp}^2 = k_{\perp}^2 + l^2$) следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{\rho_s^2 K_{\perp}^2}{ak_{\parallel}^2} \omega^2 + i\omega (1 + \rho_s^2 K_{\perp}^2) - ilv_* = 0. \quad (1.22)$$

В отсутствии столкновений, то есть при $ak_{\parallel}^2 \rightarrow \infty$, уравнение (1.22) имеет решение, описывающее электронную дрейфовую волну,

$$\omega = \frac{lv_*}{1 + \rho_s^2 K_{\perp}^2} \equiv \omega_*, \quad (1.23)$$

где ω_* – электронная дрейфовая частота. Учет электрон–ионных столкновений в уравнении (1.22) приводит к возникновению комплексного решения для частоты ω ,

$$\omega = \frac{-i(1 + \rho_s^2 K_{\perp}^2) \pm i(1 + \rho_s^2 K_{\perp}^2) \sqrt{1 - 4i \frac{lv_* \rho_s^2 K_{\perp}^2}{ak_{\parallel}^2 (1 + \rho_s^2 K_{\perp}^2)^2}}}{2 \frac{\rho_s^2 K_{\perp}^2}{ak_{\parallel}^2}}. \quad (1.24)$$

При $(lv_* \rho_s^2 K_{\perp}^2) / (ak_{\parallel}^2) \ll 1$ из (1.24) получаем, что

$$\omega \approx \omega_* + i\gamma, \quad (1.25)$$

где

$$\gamma = \frac{\omega_*^2 \rho_s^2 K_{\perp}^2}{ak_{\parallel}^2 (1 + \rho_s^2 K_{\perp}^2)} \quad (1.26)$$

определяет инкремент дрейфово–резистивной неустойчивости.

При наличии сдвигового течения уравнение (1.16) для потенциала ϕ имеет зависящие от времени коэффициенты. Решения этого уравнения будут отличными от синусоидальных (модальных) решений. В следующих разделах будут получены эти решения и тем самым будет определено влияние сдвигового течения на временную эволюцию как дрейфовых волн, так и дрейфово–диссипативной неустойчивости.

1.3 Бесстолкновительная плазма. Начальная задача для линеаризованного уравнения Хасегавы–Мима в случае однородного сдвигового течения.

В бесстолкновительном пределе $C = \infty$, поведение электронов является адиабатическим ($n = \phi$) и система уравнений (1.9), (1.10) приводится к уравнению Хасегавы–Мима [35]. В случае течения с постоянным широм линеаризованное уравнение Хасегавы–Мима имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v'_0 x \frac{\partial}{\partial y} \right) (\rho_s^2 \nabla^2 \phi - \phi) - v_* \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (1.27)$$

или в конвективных переменных

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [(1 - \rho_s^2 \Delta_{\perp c}) \phi] + v_* \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0. \quad (1.28)$$

В конвективных переменных (1.8) преобразование Фурье уравнения (1.28) имеет очень простой вид,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \left[1 + \rho_s^2 \left(l^2 + (k_{\perp} - v'_0 l \tau)^2 \right) \right] \phi \right\} + i l v_* \phi = 0. \quad (1.29)$$

Отметим, что в обычном модальном подходе решение уравнения (1.27) ищется в виде $\phi = \phi(x) \exp(ik_y y - i\omega t)$ и для функции модальной структуры $\phi(x)$ мы получаем уравнение

$$\rho_s^2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \left[(1 + \rho_s^2 k_{\perp}^2) - \frac{k_y v_*}{(\omega - k_y v_0(x))} \right] \phi = 0. \quad (1.30)$$

Рис. 1.1: Изменение потенциала ϕ дрейфовой волны во времени, определенное уравнением (1.31), в течении со сдвигом ($k_{\perp} \rho_s = 0.1$, $S = 100$, $k_{\perp}/l = 1$).

Применение преобразования Лапласа по времени к уравнению (1.30) ведет к хорошо известным проблемам как нахождения решения этого уравнения, так и вычисления обратного преобразования Лапласа полученного решения для конечного значения времени t . Фактически на этом пути можно найти в явном виде только приближенный результат для асимптотически большого времени t (см.,

на пример, [16]). Решение же уравнения первого порядка (1.28) несравненно более простая задача. Выражение

$$\begin{aligned} \phi(\tau, k_{\perp}, l, k_z) &= \phi(\tau = 0, k_{\perp}, l, k_z) \frac{1 + \rho_s^2 (l^2 + k_{\perp}^2)}{1 + \rho_s^2 l^2 + \rho_s^2 (lv'_0 \tau - k_{\perp})^2} \\ &\times \exp \left\{ -i \frac{S}{\sqrt{1 + \rho_s^2 l^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\rho_s (lv'_0 \tau - k_{\perp})}{\sqrt{1 + \rho_s^2 l^2}} + \operatorname{arctg} \frac{k_{\perp} \rho_s}{\sqrt{1 + \rho_s^2 l^2}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

где

$$S = \frac{v_*}{v'_0 \rho_s}, \quad (1.32)$$

дает простое, точное для всех моментов времени решение начальной задачи для линеаризованного уравнения Хасегавы–Мима.

Для малых значений τ , $\tau \ll (v'_0)^{-1}$, решение (1.31) дает тривиальный результат

$$\phi(\tau, k_{\perp}, l, k_z) = \phi(0, k_{\perp}, l, k_z) \exp i\omega_* \tau, \quad (1.33)$$

где

$$\omega_* = lv_* [1 + (l^2 + k_{\perp}^2) \rho_s^2]^{-1} \quad (1.34)$$

– частота дрейфовой волны.

Рис. 1.2: Изменение потенциала ϕ дрейфовой волны во времени, определенное уравнением (1.31), в течении со сдвигом ($k_{\perp} \rho_s = 1$, $S = 100$, $k_{\perp}/l = 1$).

Из решения (1.31) видно, что у дрейфовых волн с начальным наклоном, для которого $v'_0 l/k_{\perp} > 0$, на интервале времени $0 \leq \tau \leq k_{\perp}/v'_0 l$ происходит временный рост амплитуды дрейфовых волн, возникающий вследствие уменьшения знаменателя. Однако эти волны затухают как τ^{-2} начиная с времени $\tau > k_{\perp}/v'_0 l$. Этот временный рост дрейфовых волн не обнаруживался аналитически на основе модального подхода или на основе преобразования Лапласа во времени. Этот рост начальных возмущений может быть основным для экспоненциально устойчивых возмущений, а также для докритической дрейфовой турбулентности. Волна с обратным начальным наклоном, т.е., $v'_0 l/k_{\perp} < 0$, затухает монотонно как τ^{-2} для всех моментов времени.

Из решения (1.31) видно, что показатель экспоненты в этом выражении стремится к постоянному значению, когда время τ становится большим,

$$\phi(\tau, k_{\perp}, l, k_z) = \phi(0, k_{\perp}, l, k_z) \frac{1 + \rho_s^2 (k_s^2 + l^2)}{1 + \rho_s^2 l^2 + \rho_s^2 (k_{\perp} - v'_0 l \tau)^2} e^{i\alpha}, \quad (1.35)$$

где

Рис. 1.3: Изменение потенциала ϕ во времени, определенное уравнением (1.31), в течении со сдвигом ($k_{\perp} \rho_s = 0.1$, $S = 10$, $k_{\perp}/l = 1$).

$$\alpha = \frac{v_*}{v'_0 \rho_s \sqrt{1 + \rho_s^2 l^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg} \frac{\rho_s k_{\perp}}{\sqrt{1 + \rho_s^2 l^2}} \right) \quad (1.36)$$

Рис. 1.4: Изменение потенциала ϕ дрейфовой волны во времени, определенное уравнением (1.31), в течении со сдвигом ($k_{\perp} \rho_s = 1$, $S = 10$, $k_{\perp}/l = 1$).

Интересно отметить, что выражение (1.35) является решением линеаризованного уравнения для экранированной конвективной ячейки [36, 37] в плазме с постоянным сдвиговым течением,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v'_0 x \frac{\partial}{\partial y} \right) (\rho_s^2 \nabla^2 \phi - \phi) = 0, \quad (1.37)$$

или в конвективных переменных

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [(1 - \rho_s^2 \Delta_{\perp c}) \phi] = 0. \quad (1.38)$$

Из этого можно сделать вывод, что дрейфовая волна в сдвиговом течении в конце

Рис. 1.5: Изменение потенциала ϕ дрейфовой волны во времени, определенное уравнением (1.31), в сдвиговом течении плазмы ($k_{\perp} \rho_s = 0.1$, $S = 1$, $k_{\perp}/l = 1$).

концов переходит в конвективную ячейку и решение в виде нормальной моды $\phi = \phi(x) \exp(ik_y y - i\omega t)$ не является установившимся предельным решением для рассматриваемой начальной задачи.

Общее решение начальной задачи для уравнения Хасегавы–Мима (1.31) с начальным условием (1.20) имеет вид

$$\phi(\tau, \xi, \eta, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint dk_{\perp} dl e^{ik_{\perp} \xi + i l \eta} \phi(0, k_{\perp}, l, z) f(\tau, k_{\perp}, l) e^{i\Gamma(\tau, k_{\perp}, l)}, \quad (1.39)$$

Рис. 1.6: Изменение потенциала ϕ во времени, определенное уравнением (1.31), в течении со сдвигом ($k_{\perp}\rho_s = 1$, $S = 1$, $k_{\perp}/l = 1$).

где

$$f(\tau, k_{\perp}, l) = \frac{1 + \rho_s^2 (k_{\perp}^2 + l^2)}{1 + \rho_s^2 l^2 + \rho_s^2 (k_{\perp} - v_0' \tau l)^2} \quad (1.40)$$

и

$$\Gamma(\tau, k_{\perp}, l) = \frac{v_*}{v_0' \rho_s \sqrt{1 + \rho_s^2 l^2}} \left(\arctg \frac{\rho_s (k_{\perp} - v_0' l \tau)}{\sqrt{1 + \rho_s^2 l^2}} - \arctg \frac{\rho_s k_{\perp}}{\sqrt{1 + \rho_s^2 l^2}} \right). \quad (1.41)$$

Величину $\Gamma(\tau, k_{\perp}, l)$ можно записать в виде

$$\Gamma(\tau, k_{\perp}, l) = \int_0^{\tau} \omega(\tau_1, k_{\perp}, l) d\tau_1, \quad (1.42)$$

где функция

$$\omega(\tau, k_{\perp}, l) = -\frac{lv_*}{1 + l^2 \rho_s^2 + \rho_s^2 (k_{\perp} - lv_0' \tau)^2} \quad (1.43)$$

может быть определена как «локальная» дрейфовая частота волны, если волновые числа k_x , k_y , k_z в лабораторной системе отсчета (x, y, z) отождествляются с

$$k_x(\tau) = k_{\perp} - lv_0' \tau, \quad k_y = l, \quad k_z = k_z. \quad (1.44)$$

Теперь рассмотрим эволюцию во времени начального возмущения в виде волнового пакета, который сгруппирован вокруг центрального волнового числа $K_0 = (k_{0\perp}, l_0)$,

$$\phi(0, x, y) \equiv \phi(0, \xi, \eta) = a(\xi, \eta) e^{ik_{0\perp}\xi + il_0\eta}, \quad (1.45)$$

где $a(\xi, \eta) = a(x, y)$ – функция, определяющая огибающую волнового пакета. Разложив функцию $\Gamma(\tau, k_{\perp}, l)$ в окрестности центрального волнового вектора, получаем что

$$\begin{aligned} \phi(\tau, \xi, \eta) \approx a \left(\xi + \frac{\partial \Gamma}{\partial k_{\perp 0}} \Big|_{k_{\perp 0}, l_0}, \eta + \frac{\partial \Gamma}{\partial l} \Big|_{k_{\perp 0}, l_0} \right) f(\tau, k_{\perp 0}, l_0) \\ \times \exp(i\Gamma(\tau, k_{\perp 0}, l_0) + ik_{\perp 0}\xi + il_0\eta) \end{aligned} \quad (1.46)$$

Из уравнения (1.46) следует, что в лабораторной системе отсчета огибающая пакета движется как

$$x(t) = \xi(t) = \xi(0) - \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial k_{\perp}} \right|_{k_{\perp}=k_{\perp 0}, l=l_0}, \quad (1.47)$$

$$y(t) = \eta(t) + v'_0 x t = \eta(0) + v'_0 x t - \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial l} \right|_{l=l_0, k_{\perp}=k_{\perp 0}}. \quad (1.48)$$

В конвективной системе отсчета смещения вдоль, $\partial \Gamma / \partial k_{\perp}$, и поперек, $\partial \Gamma / \partial l$, градиента скорости соответственно равны

$$\left. \frac{\partial \Gamma}{\partial k_{\perp}} \right|_{k_{\perp 0}, l_0} = \frac{v_*}{v'_0} \left[\frac{1}{1 + \rho_s^2 l_0^2 + \rho_s^2 (k_{\perp 0} - v'_0 \tau l_0)^2} - \frac{1}{1 + \rho_s^2 (l_0^2 + k_{\perp 0}^2)} \right], \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial l} \right|_{k_0, l_0} &= \\ &= -\frac{v_*}{v'_0} \frac{l_0 \rho_s}{(1 + l_0^2 \rho_s^2)^{3/2}} \left[\arctg \frac{\rho_s (k_{\perp 0} - v'_0 l_0 \tau)}{\sqrt{1 + \rho_s^2 l_0^2}} - \arctg \frac{\rho_s k_{\perp 0}}{\sqrt{1 + \rho_s^2 l_0^2}} \right] \\ &- \frac{v_*}{v'_0} \frac{1}{(1 + \rho_s^2 l_0^2)} \left[\frac{l_0 k_{\perp 0} \rho_s^2 + v'_0 \tau}{1 + l_0^2 \rho_s^2 + \rho_s^2 (k_{\perp 0} - v'_0 l_0 \tau)^2} - \frac{k_{\perp 0} l_0 \rho_s^2}{1 + \rho_s^2 (k_{\perp 0}^2 + l_0^2)} \right]. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Для малых времен мы получаем в лабораторной системе отсчета, что

$$x(\tau) = x(\tau = 0) - 2 \frac{v_* k_{\perp 0} l_0}{(1 + \rho_s^2 (l_0^2 + k_{\perp 0}^2))^2} = x(\tau = 0) - \frac{\partial \omega_*}{\partial k_{\perp 0}} \tau. \quad (1.51)$$

Такая же зависимость как (1.51), в которой величина v'_0 отсутствует, возникает и при отсутствии сдвигового течения. При наличии сдвигового течения смещения пакета $\xi(\tau)$ и $\eta(\tau)$ имеют конечные пределы,

$$\xi(\tau = \infty) - \xi(\tau = 0) = \frac{v_*}{v'_0} \frac{1}{1 + \rho_s^2 (l_0^2 + k_{\perp 0}^2)}, \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned} \eta(\tau = \infty) - \eta(\tau = 0) &= -\frac{v_*}{v'_0} \frac{l_0 \rho_s}{(1 + l_0^2 \rho_s^2)^{3/2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\rho_s k_{\perp 0}}{\sqrt{1 + \rho_s^2 l_0^2}} \right] \\ &+ \frac{v_*}{v'_0} \frac{l_0 k_{\perp 0} \rho_s^2}{(1 + l_0^2 \rho_s^2) (1 + \rho_s^2 (k_{\perp 0}^2 + l_0^2))}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Это означает существование уровня «застоя» в конвективной системе отсчета для центра волнового пакета как в направлении координаты ξ так и вдоль

η . Отметим, что условие резонанса $\omega = lv_0(x_0)$ в уравнении (1.30) выполняется в точке x_0 , где

$$x_0 = \frac{v_*}{v'_0} \frac{1}{1 + \rho_s^2 (k_{\perp 0}^2 + l_0^2)}. \quad (1.54)$$

Поэтому пакет, локализованный вначале в $x(\tau = 0) = 0$, будет блокирован в окрестности резонанса $\omega = lv_E(x_0)$.

Компоненты групповой скорости пакета равны

$$v_{gx} = -\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial k_{\perp}} \right)_{k_{\perp 0}, l_0} = -2v_* \frac{\rho_s^2 l_0 (k_{\perp 0} - v'_0 l_0 \tau)}{\left[1 + \rho_s^2 l_0^2 + \rho_s^2 (k_{\perp 0} - v'_0 \tau l_0)^2 \right]^2} \quad (1.55)$$

$$v_{gy} = -\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial l} \right)_{k_{\perp 0}, l_0} = v_* \frac{1 - \rho_s^2 l_0^2}{(1 + \rho_s^2 l_0^2) \left(1 + \rho_s^2 l_0^2 + \rho_s^2 (k_{\perp 0} - v'_0 \tau l_0)^2 \right)} + 2v_* \frac{\rho_s^2 l_0 (k_{\perp 0} - v'_0 l_0 \tau)}{1 + \rho_s^2 l_0^2} \frac{(k_{\perp 0} l_0 \rho_s^2 + v'_0 \tau)}{\left(1 + \rho_s^2 l_0^2 + \rho_s^2 (k_{\perp 0} - v'_0 \tau l_0)^2 \right)^2}. \quad (1.56)$$

Из уравнений (1.55) и (1.56) следует, что сдвиговое течение ведет к обращению в ноль компонентов групповой скорости v_{gx} и v_{gy} со временем, т.е. к остановке пакета в соответствии с результатами приведенными выше.

Из уравнения (1.55) очевидно, что волновые пакеты с положительной величиной отношения $k_{\perp 0}/v'_0 l_0$ имеют траектории отличные от траекторий пакетов с отрицательной величиной этого отношения. Для $k_{\perp 0}/v'_0 l_0 > 0$ групповая скорость v_{gx} обращается в нуль в момент времени $\tau_0 = k_{\perp 0}/v'_0 l_0$ в точке отражения пакета

$$x(\tau_0) = x(0) - \frac{v_*}{v'_0} \left(\frac{1}{1 + \rho_s^2 l_0^2} - \frac{1}{1 + \rho_s^2 (l_0^2 + k_{\perp 0}^2)} \right). \quad (1.57)$$

Для $\tau > \tau_0$ групповая скорость v_{gx} приобретает противоположный знак и волновые пакеты с $k_{\perp 0}/v'_0 l_0 > 0$, как и пакеты с $k_{\perp 0}/v'_0 l_0 < 0$, движутся без изменения направления в направлении уровня застоя (1.52).

Уравнение (1.46) дает правильное представление решения (1.39) в виде волнового пакета для моментов времени τ более ранних, чем τ_{lim} , где

$$\tau_{\text{lim}} = \frac{\tau_0}{k_{\perp} \rho_s} S. \quad (1.58)$$

Для параметров краевого слоя токамака ТЕХТ [7] ($B_0 = 10^4$ Гс, $\tilde{n}/n_0 \sim 10^{-2}$, $T_i \sim T_e \sim 50$, $v_s \approx 7 \cdot 10^6$, $k_\perp \rho_s \approx 0.1$, $v'_0 \approx 10^5$ с $^{-1}$), имеем $S = 5$ и при этих условиях $\tau_{\text{lim}} \gg \tau_0$.

В данном разделе рассмотрено линеаризованное уравнение Хасегавы–Мима. Процедура линеаризации состояла в пренебрежении слагаемым $(c/B^2) [\mathbf{B}_0 \times \nabla \varphi]$, определяющем флуктуационную дрейфовую скорость ионов в уравнении (1.6). Оценим при каких значениях координаты x выполнимо условие

$$v'_0 x > c \nabla \varphi / B_0, \quad (1.59)$$

при котором линеаризация уравнения Хасегавы–Мима допустима. Поскольку электроны предполагаются адиабатическими, их возмущение плотности равно $\tilde{n} \approx n_0 \phi$ что дает следующую оценку для координаты x :

$$|x| > k \rho_s \frac{\tilde{n} v_s}{n_0 v'_0}. \quad (1.60)$$

Для краевой области токамака ТЕХТ [7] имеем оценку $x > 7 \cdot 10^{-2}$ см $\approx \rho_i$. Поэтому пренебрежение флуктуационной скоростью оказывается оправданным для всех значений координаты x , для которых применимо само дрейфовое приближение, в рамках которого получено уравнение Хасегавы–Мима. Вычислим, тем не менее, нелинейную поправку к решению (1.31), обусловленную флуктуационной дрейфовой скоростью ионов. Представим возмущенный потенциал ϕ в виде суммы $\phi = \phi_1 + \phi_2$, где ϕ_1 – линейное решение, определенное выражением (1.31), а ϕ_2 – нелинейная поправка, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s^2 \Delta \phi_2 - \phi_2) + v'_0 x \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - v_* \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = - \left(\frac{c}{B} [\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \phi_1] \cdot \nabla \right) (\rho_s^2 \Delta \phi_1 - \phi_1) \quad (1.61)$$

Выполнив преобразование Фурье уравнения (1.61) получим следующее уравнение для $\phi_2(k_{\perp 1}, l_1, \tau)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \left[1 + \rho_s^2 \left(l^2 + (k_\perp - v'_0 l \tau)^2 \right) \right] \phi_2 \right\} + i l v_* \phi_2 \\ &= \frac{c}{B} \iiint_{-\infty}^{\infty} dk_{\perp 1} dl_1 dk_{\perp 2} dl_2 \delta(k_\perp - k_{\perp 1} - k_{\perp 2}) \delta(l - l_1 - l_2) \\ & \times \phi_1(k_{\perp 1}, l_1, \tau) \phi_1(k_{\perp 2}, l_2, \tau) (l_1 k_{\perp 2} - l_2 k_{\perp 1}) \left[1 + \rho_s^2 \left(l_2^2 + (k_{\perp 2} - v'_0 l_2 \tau)^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (1.62)$$

Из этого уравнения следует, что в случае, когда начальное условие $\phi_1(k_\perp, l, 0)$ задано в виде одной Фурье гармоники, т.е. $\phi_1(k_\perp, l, 0) = \phi_0 \delta(k_\perp - k_{\perp 0}) \delta(l - l_0)$, правая часть уравнения (1.62) обращается в нуль, поскольку при таком начальном условии $k_\perp = k_{\perp 1} = k_{\perp 2}$ и $l = l_1 = l_2$. Поэтому и нелинейная поправка ϕ_2 также равна нулю и решение (1.31) оказывается для таких начальных условий решением начальной задачи для нелинейного уравнения Хасегавы–Мима.

1.4 Столкновительная плазма. Немодальная эволюция резистивной дрейфовой неустойчивости.

В этом разделе мы рассматриваем временную эволюцию дрейфовых волн в столкновительной плазме на основе уравнения (1.16). Исследование проведём для в двух предельных случаев:

1) $C \gg 1$, предел слабых столкновений или слабый шир течения

2) $C \ll 1$, предел сильных столкновений или сильный шир сдвигового течения

учитывая тем самым, что резистивность вдоль магнитного поля и шир сдвигового течения могут влиять на величину параметра C .

1.4.1 Слабостолкновительная плазма.

В случае $C \gg 1$ решение начальной задачи ищем в виде:

$$\phi(T, k_\perp, l, k_\parallel) = \exp \left(C \int_{-\frac{k_\perp}{l}}^T f(T_1) dT_1 \right), \quad (1.63)$$

где

$$f(T) = f_0(T) + \frac{1}{C} f_1(T) + \frac{1}{C^2} f_2(T) + \dots \quad (1.64)$$

Подставляя (1.63) в уравнение (1.16), получаем сильно затухающие решение

$$f_{0(1)}(T) = -\frac{1}{1+T^2} - l^2 \rho_s^2, \quad (1.65)$$

и второе решение с $f_{0(2)}(T) = 0$. Если мы пренебрежем сильно затухающим решением и учтем только слагаемое f_1 в выражении (1.64), то получим решение (1.31) начальной задачи для линеаризованного уравнения Хасегавы–Мима (1.27) в случае течения с постоянным широм. Учет членов $f_2(T)$ в решении (1.63) ведет к

Рис. 1.7: Изменение амплитуды потенциала ϕ во времени, определенное уравнением (1.66), в течении столкновительной плазмы со сдвигом скорости ($S = 10$, $C = 10$, $k_{\perp}\rho_s = 0.3$).

гораздо более громоздкому представлению решения линейной начальной задачи, в котором учтены эффекты, связанные с конечным сопротивлением плазмы. Это решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\phi(\tau, k_{\perp}, l, k_z) = & \phi(\tau = 0, k_{\perp}, l, k_z) \frac{1 + \rho_s^2(l^2 + k_{\perp}^2)}{1 + \rho_s^2 l^2 + \rho_s^2(lv'_0\tau - k_{\perp})^2} \\
& \times \exp \left\{ -i \frac{S}{\sqrt{1 + \rho_s^2 l^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\rho_s(lv'_0\tau - k_{\perp})}{\sqrt{1 + \rho_s^2 l^2}} + \operatorname{arctg} \frac{k_{\perp}\rho_s}{\sqrt{1 + \rho_s^2 l^2}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{C} \left[-2 \left(v'_0\tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right) - \frac{3}{2} i \frac{S}{l\rho_s} - \frac{1}{4} \frac{S^2 (v'_0\tau - \frac{k_{\perp}}{l})}{(1 + l^2\rho_s^2)} \right] \right. \\
& \quad \times \frac{1}{\left(1 + l^2\rho_s^2 + \rho_s^2(lv'_0\tau - k_{\perp})^2 \right)^2} \\
& \quad + \frac{1}{C} \left[-2 \frac{k_{\perp}}{l} + \frac{3}{2} i \frac{S}{l\rho_s} - \frac{1}{4} \frac{k_{\perp}}{l} \frac{S^2}{1 + l^2\rho_s^2} \right] \frac{1}{\left(1 + (l^2 + k_{\perp}^2)\rho_s^2 \right)^2} \\
& \quad + \frac{1}{C} \left[i \frac{S}{l\rho_s} + \frac{1}{8} \frac{S^2(lv'_0\tau - k_{\perp})(1 + 4l^2\rho_s^2)}{(1 + l^2\rho_s^2)^2 l} \right] \frac{1}{1 + l^2\rho_s^2 + \rho_s^2(lv'_0\tau - k_{\perp})^2} \\
& \quad + \frac{1}{C} \left[-i \frac{S}{l\rho_s} + \frac{1}{8} \frac{S^2 k_{\perp} (1 + 4l^2\rho_s^2)}{l(1 + l^2\rho_s^2)^2} \right] \frac{1}{1 + \rho_s^2(k_{\perp}^2 + l^2)} \\
& \quad \left. + \frac{1}{8C} \frac{S^2(1 + 4l^2\rho_s^2)}{l\rho_s(1 + l^2\rho_s^2)^{5/2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\rho_s(v'_0 l\tau - k_{\perp})}{\sqrt{1 + \rho_s^2 l^2}} + \operatorname{arctg} \frac{k_{\perp}\rho_s}{\sqrt{1 + \rho_s^2 l^2}} \right) \right\}. \tag{1.66}
\end{aligned}$$

Удерживая линейные и квадратичные члены по времени τ в разложении ряда Тейлора в экспоненте уравнения (1.66), для короткого периода времени τ получаем

Рис. 1.8: Изменение амплитуды потенциала ϕ во времени, определенное уравнением (1.66), в течении столкновительной плазмы со сдвигом скорости ($S = 4$, $C = 5$, $k_{\perp}\rho_s = 0.3$).

$$\begin{aligned} \phi(\tau, k_{\perp}, l, k_z) = & \phi(\tau = 0, k_{\perp}, l, k_z) \frac{1 + \rho_s^2 (k_{\perp}^2 + l^2)}{1 + l^2 \rho_s^2 + \rho_s^2 (lv'_0\tau - k_{\perp})^2} \\ & \times \exp \left[-i\omega_*\tau \left(1 + \frac{2 k_{\perp}}{C l} \frac{(2 - \rho_s^2 (k_{\perp}^2 + l^2))}{(1 + \rho_s^2 (k_{\perp}^2 + l^2))^2} \right) \right. \\ & \left. + \left(\gamma\tau - 2 \frac{v'_0\tau (1 - \rho_s^2 (3k_{\perp}^2 - l^2))}{C (1 + \rho_s^2 (k_{\perp}^2 + l^2))^3} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.67)$$

$$\begin{aligned} & -i \frac{v_*^2 k_{\perp} l \rho_s \tau^2}{S (1 + \rho_s^2 (l^2 + k_{\perp}^2))^2} - \frac{1}{C} \frac{v_*^2 l k_{\perp} (2 + 9k_{\perp}^2 \rho_s^2 - l^2 \rho_s^2)}{(1 + l^2 \rho_s^2) (1 + \rho_s^2 (l^2 + k_{\perp}^2))^4} \frac{\tau^2}{2} \\ & + \frac{iv'_0\tau^2}{C} \left(\frac{18v_* l k^2 \rho_s^2}{(1 + \rho_s^2 (k_{\perp}^2 + l^2))^4} + \frac{4v_* l k^2 \rho_s^2 + 6v_* l}{(1 + \rho_s^2 (k_{\perp}^2 + l^2))^3} - \frac{v_* l}{(1 + \rho_s^2 (k_{\perp}^2 + l^2))^2} \right) \Big]. \end{aligned}$$

Рис. 1.9: Изменение амплитуды потенциала ϕ дрейфовых волн во времени, определенное уравнением (1.66), в сдвиговом течении столкновительной плазмы ($S = 2$, $C = 10$, $k_{\perp}\rho_s = 0.3$).

В решении (1.67)

$$\gamma = \frac{\omega_*^2 \rho_s^2 (k_{\perp}^2 + l^2)}{ak_z^2 (1 + \rho_s^2 (k_{\perp}^2 + l^2))} = v'_0 \frac{S^2}{C} \frac{\rho_s^2 (k_{\perp}^2 + l^2)}{(1 + \rho_s^2 (k_{\perp}^2 + l^2))^3} \quad (1.68)$$

является хорошо известным инкрементом модальной дрейфово-резистивной неустойчивости [2]. Из уравнения (1.67) мы заключаем, что сдвиговое течение уменьшает инкремент этой модальной резистивной дрейфовой неустойчивости, и подавляет ее развитие как модальной неустойчивости, когда

$$\gamma\tau = 2 \frac{v'_0\tau (1 - \rho_s^2 (3k_{\perp}^2 - l^2))}{C (1 + \rho_s^2 (k_{\perp}^2 + l^2))^3},$$

то есть, когда

Рис. 1.10: Изменение амплитуды потенциала ϕ дрейфовых волн во времени, определенное уравнениями (1.74), (1.79), в сдвиговом течении столкновительной плазмы ($C = 0.1$, $S = 10$, $k_{\perp}\rho_s = 0.3$).

$$|v'_0| > v_* \sqrt{\frac{(k_\perp^2 + l^2)}{2(1 - \rho_s^2(3k_\perp^2 - l^2))}}. \quad (1.69)$$

Члены порядка $\mathcal{O}(\tau^2)$ в уравнении (1.67) (а также более высокого порядка в уравнении (1.66)) определяют экспоненциальную немодальную эволюцию амплитуды потенциала ϕ . Как следует из уравнения (1.66), немодальная временная зависимость возникает в благодаря функции \arctg и знаменателей $(1 + l^2 \rho_s^2 + (lv'_0 \tau - k_\perp)^2)^{-n}$, где $n = 1$ или 2 . Убывание слагаемых в экспоненте у решения (1.66) вследствие роста знаменателей $1 + l^2 \rho_s^2 + (lv'_0 \tau - k_\perp)^2$ происходит для моментов времени $\tau \gg \tau_1$, где

$$\tau_1 = \frac{1}{l \rho_s |v'_0|} = \frac{1}{\gamma C} \frac{S^2 l^2 + k_\perp^2}{l^2} \frac{l \rho_s}{(1 + \rho_s^2 (l^2 + k_\perp^2))^3}. \quad (1.70)$$

Поэтому для случая $S^2 l \rho_s \gg C \gg 1$, т.е., в случае, когда

$$|v'_0| \ll \frac{v_*^2 l^3 \rho_s}{a k_z^2}, \quad (1.71)$$

мы имеем $\tau_1 \gamma \gg 1$, т.е., «немодальные» эффекты эволюции амплитуды проявляются после длительного периода экспоненциального роста амплитуды дрейфовой волны, когда нелинейные эффекты уже становятся более существенными. Для этого случая представление (1.67) справедливо по крайней мере до момента времени $\tau \sim \gamma^{-1}$.

В случае, когда $C \gg S^2 l \rho_s \gg 1$, т.е. для

$$|v'_0| \gg \frac{v_*^2 l^3 \rho_s}{a k_z^2}, \quad (1.72)$$

немодальные эффекты становятся существенными в моменты времени значительно более ранние, чем γ^{-1} . Из-за этих немодальных эффектов слагаемые в экспоненте решения (1.66), которые формируют линейный инкремент γ в разложении (1.67), затухают как $(v'_0 \tau)^{-2}$. Также эти члены оказываются теперь в $C/S \gg 1$ раз меньшими, чем первый член, который пропорционален C^0 . Это означает, что в этом случае решение (1.67) оказывается применимым только для моментов времени $\tau \ll \gamma^{-1}$, а подход, основанный на использовании нормальных мод, в этом случае неприменим.

Рассмотрим теперь немодальное вещественное слагаемое пропорциональное τ^2 в разложении показателя экспоненты в (1.67). Из этого разложения следует, что это немодальное слагаемое становится больше слагаемого $\gamma\tau$ за время $\tau \sim \gamma^{-1}$ при выполнении условия

$$\frac{1}{C} \frac{v_*^2 l k_\perp}{\gamma^2} > 1. \quad (1.73)$$

Используя соотношение (1.68) для инкремента γ получаем из (1.67) условие

$$v'_0 > \gamma \left(\frac{k_\perp}{l} + \frac{l}{k_\perp} \right), \quad (1.74)$$

при котором происходит подавление дрейфовой неустойчивости сдвиговым течением вследствие развития немодальных процессов. Поскольку инкремент дрейфово-резистивной неустойчивости (1.68) значительно меньше, чем дрейфовая частота lv_* , условие (1.74) требует значительно меньшее значение для шира скорости, чем (1.69), при котором происходит подавление дрейфово-резистивной неустойчивости. При этих условиях амплитуда дрейфовых колебаний убывает очень быстро как $\exp(-\alpha t^2)$ и сам процесс подавления дрейфово-резистивной неустойчивости сдвиговым течением является немодальным процессом и долговременная эволюция начальных возмущений в случае $C \gg 1$ будет определяться немодальным решением (1.66). Из вышеприведенного также следует, что блокировка волновых пакетов на их уровнях застоя и окончательная трансформация дрейфовых волн в конвективные ячейки являются врожденными свойствами этой эволюции. Следует также отметить, что поскольку условием стабилизации дрейфовой неустойчивости вследствие нелинейной усиленной декорреляции [12] оказывается условие $|v'_0| > \gamma$, соответствующая нелинейная теория усиленной декорреляции должна быть построена на немодальных решениях, полученных в этой Главе.

Отметим, что условие стабилизации дрейфовой неустойчивости сдвиговым течением (1.74) не выполняется для возмущений, для которых $l = 0$ либо $k_\perp = 0$. Поэтому сдвиговое течение не приводит к подавлению зональных течений, которые характеризуются как возмущения с $l = 0$, а также стриммеров (аваланчей), которые определяются как возмущения с $k_\perp = 0$.

1.4.2 Сильностолкновительная плазма.

В пределе сильных столкновений или в пределе достаточно сильного сдвигового течения (случай когда $C \ll 1$), решение уравнения (1.18) можно найти в виде степенного разложения по малому параметру C , $\phi(T) = \phi_0(T) + C\phi_1(T) + \dots$. Для начальных условий (1.20), (1.21) получаем

$$\begin{aligned} \phi(\tau, k_{\perp}, l, k_z) &= \phi(\tau = 0, k_{\perp}, l, k_z) \frac{k_{\perp}^2 + l^2}{l^2 + (k_{\perp} - v'_0 \tau l)^2} \\ &\times \left\{ 1 + C \left[i \frac{lv_*}{2v'_0} \ln \left(\frac{l^2 + (k_{\perp} - v'_0 l \tau)^2}{l^2 + k_{\perp}^2} \right) - \left(\operatorname{arctg} \left(v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right) + \operatorname{arctg} \frac{k_{\perp}}{l} \right) \right. \right. \\ &\left. \left. \times \left(1 + i \frac{lv_*}{v'_E} \left(v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right) \right) \right] \right\} + C \frac{n(\tau = 0, k_{\perp}, l, k_z) v'_0 \tau l^2}{l^2 + (v'_0 l \tau - k_{\perp})^2} + \mathcal{O}(C^2). \end{aligned} \quad (1.75)$$

Из решения (1.75) следует, что решение уравнения (1.18) при $C \ll 1$ не обладает модальной структурой вида $\sim \exp i\omega\tau$ даже для короткого начального интервала времени τ .

Очевидно, что степенное разложение (1.75) является расходящимся для достаточно больших τ . Для изучения поведения решения для произвольно большого значений времени T в случае $C \lesssim 1$ (а также для $C \ll 1$) мы вводим новую переменную $\psi(T)$, определенную как

$$\phi(T, k_{\perp}, l, k_z) = \frac{\psi(T, k_{\perp}, l, k_z)}{1 + T^2}. \quad (1.76)$$

Подстановка (1.76) в уравнение (1.18) дает уравнение для $\psi(T)$ вида

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} + C \frac{\partial}{\partial T} \left[\left(l^2 \rho_s^2 + \frac{1}{1 + T^2} \right) \psi \right] + iC \frac{Sl\rho_s}{1 + T^2} \psi = 0. \quad (1.77)$$

Для больших времен T , когда $T \gg (l\rho_s)^{-1} > 1$, уравнение (1.77) может быть упрощено к виду

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} + Cl^2 \rho_s^2 \frac{\partial \psi}{\partial T} + iC \frac{Sl\rho_s}{T^2} \psi = 0. \quad (1.78)$$

В случае, когда $S \gg 1 \gg l\rho_s$ и $C \lesssim 1$, в пределах временного интервала

$$\frac{1}{l\rho_s} \leq T \ll S \frac{1}{l\rho_s} \quad (1.79)$$

слагаемым $\partial\psi/\partial T$ в уравнении (1.78) можно быть пренебречь. Тогда мы имеем простое уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2} + iC \frac{lv_*}{v'_0} \frac{\psi}{T^2} = 0,$$

решение которого имеет следующий вид:

$$\psi(T) = A_1 T^{\kappa_1} + A_2 T^{\kappa_2}, \quad (1.80)$$

где

$$\kappa_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - iC \frac{lv_*}{v'_0}} \equiv \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - i \frac{T_e k_z}{\rho_s^2 l^2 (v'_0)^2 n_0 e^2 \eta_{\parallel}}}. \quad (1.81)$$

Для асимптотического предела $C \ll 1$ мы находим, что

$$\psi(T) \approx A_1 \left(T - \frac{ilv_*}{v'_0} C \ln T \right) + A_2 \left(1 + \frac{ilv_*}{v'_0} C \ln T \right) \quad (1.82)$$

и константы A_1 и A_2 могут быть получены сшивкой решений (1.80), (1.76) и прямого разложения (1.75). То есть, для $C \ll 1$ внутри временного интервала (1.79) мы имеем

$$A_1 = C \left(n(0) - i\phi(0) \frac{lv_*}{v'_0} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{k_{\perp}}{l} \right) \right) + \mathcal{O}(C^2), \quad (1.83)$$

$$A_2 = \phi(0) \left(1 + \frac{k_{\perp}^2}{l^2} \right) + \mathcal{O}(C^2). \quad (1.84)$$

Таким образом, внутри временного интервала (1.79) для $C \lesssim 1$ решение уравнения (1.18) имеет вид (1.80) далекий от модального.

При $T \gg S(l\rho_s)^{-1}$ уравнение (1.78) может быть аппроксимировано для $C \lesssim 1$ как

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2} + Cl^2 \rho_s^2 \frac{\partial\psi}{\partial T} = 0$$

с решением

$$\psi(T) = B_1 + B_2 \exp(-Cl^2 \rho_s^2 T). \quad (1.85)$$

Поэтому для больших времен τ потенциал $\phi(\tau)$ затухает как $(v'_{E\tau})^{-2}$. Таким образом в случае $C \lesssim 1$ уравнение (1.18) не имеет решения в модальном виде для любого момента времени.

Для $T \gg (Cl^2\rho_s^2)^{-1}$ мы имеем решение $\psi(T) = \text{const}$, или $\phi(T) = (1 + T^2)^{-1}$. Это является решением линеаризованного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial T} \Delta_{\perp c} \phi = 0, \quad (1.86)$$

где $\Delta_{\perp c}$ определяется уравнением (1.14). Уравнение (1.86) определяет двумерные конвективные ячейки в конвективных переменных. Поэтому можно сделать вывод, что решение уравнения (1.16) как в случае, когда $C \lesssim 1$, так и в случае $C \gg 1$, при асимптотически больших временах обладает структурой конвективной ячейки.

1.5 Законы сохранения.

Для системы уравнений Хасегава–Вакатани выполняются следующие законы сохранения энергии E и энстрофии F [28]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \left[n^2 + \rho_s^2 (\nabla \phi)^2 \right] dV \\ &= -c_1 \int (n - \phi)^2 dV - \int n [\widehat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\kappa}] \cdot \nabla \phi dV \end{aligned} \quad (1.87)$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int (\rho_s^2 \Delta \phi - n)^2 dV = - \int n [\widehat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\kappa}] \cdot \nabla \phi dV, \quad (1.88)$$

где

$$c_1 = -\frac{T_e}{e^2 n_0 \eta_{\parallel}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -a \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \boldsymbol{\kappa} = -\rho_s^2 \nabla \ln n_0 \quad (1.89)$$

$$n(T) = \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial T} \left[(1 + T^2) \phi \right] + \phi. \quad (1.90)$$

В случаях $C \gg 1$ и $C \ll 1$ решения системы уравнений Хасегавы–Вакатани для потенциала $\phi(T)$ различны. При $C \rightarrow \infty$ система уравнений Хасегавы–Вакатани приводится к уравнению Хасегава–Мима, решение которого имеет вид (1.31). В этом случае законы сохранения (1.87)–(1.88) будут иметь вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \left[n^2 + \rho_s^2 (\nabla \phi)^2 \right] dV = - \int n [\widehat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\kappa}] \cdot \nabla \phi dV \quad (1.91)$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int (\rho_s^2 \Delta \phi - n)^2 dV = - \int n [\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\kappa}] \cdot \nabla \phi dV, \quad (1.92)$$

Рассмотрим достаточно большой интервал времени, для которого применимо упрощенное асимптотическое решение (1.35). Применим к решению (1.35) обратное преобразование Фурье, и, выполнив интегрирование по l (для пакета волн), в предположении, что $|\partial \phi_0 / \partial y| \ll |l \phi_0|$, получим в пределе больших значений $|\eta| = |y - v'_0 x t| \gg 1$ следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} n(t, x, y, z) = \phi(t, x, y, z) &= \frac{1}{1 + l^2 \rho_s^2 (v'_0 t)^2} \exp\left(\frac{i v_* \pi}{v'_0 \rho_s} \frac{\pi}{2}\right) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i \phi_0(0, k_{\perp}, l, k_z) e^{i x k_{\perp} + i l (y - v'_0 x t) + i k_z z} \frac{dk_{\perp} dk_z}{v'_0 x t - y} \Big|_{l_1}^{l_2}, \end{aligned} \quad (1.93)$$

$$\begin{aligned} \nabla \phi(x, y, z, t) &= \frac{1}{1 + l^2 \rho_s^2 (v'_0 t)^2} \exp\left(\frac{i v_* \pi}{v'_0 \rho_s} \frac{\pi}{2}\right) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\perp} dk_z \frac{\phi_0(0, k_{\perp}, l, k_z)}{v'_0 x t - y} e^{i x k_{\perp} + i l (y - v'_0 x t) + i k_z z} \\ &\times \left[-k_z \mathbf{e}_z - \left(k_{\perp} - l v'_0 t + \frac{i v'_0 t}{v'_0 x t - y} \right) \mathbf{e}_x + \left(-l + \frac{i}{v'_0 x t - y} \right) \mathbf{e}_y \right] \Big|_{l_1}^{l_2}, \end{aligned} \quad (1.94)$$

$$n^2(x, y, z, t) = \frac{1}{\left(1 + l^2 \rho_s^2 (v'_0 t)^2\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2(0, k_{\perp}, l, k_z) \frac{dk_{\perp} dk_z}{(v'_0 x t - y)^2} \Big|_{l_1}^{l_2}, \quad (1.95)$$

$$\begin{aligned} (\nabla \phi(x, y, z, t))^2 &= \frac{1}{\left(1 + l^2 \rho_s^2 (v'_0 t)^2\right)^2} \frac{1}{(v'_0 x t - y)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\perp} dk_z \\ &\times \phi_0^2(0, k_{\perp}, l, k_z) \left[k_z^2 + (k_{\perp} - l v'_0 t)^2 + l^2 + \frac{1 + (v'_0 t)^2}{(v'_0 x t - y)^2} \right] \Big|_{l_1}^{l_2}, \end{aligned} \quad (1.96)$$

$$\begin{aligned}
\Delta\phi(x, y, z, t) &= \frac{1}{1 + l^2\rho_s^2(v'_0t)^2} \exp\left(\frac{iv_*\pi}{v'_0\rho_s} \frac{\pi}{2}\right) \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\perp} dk_z \frac{\phi_0(0, k_{\perp}, l, k_z)}{(v'_0xt - y)^2} e^{ixk_{\perp} + il(y - v'_0xt) + ik_z z} \\
&\times \left[-k_z^2 - l^2(1 + (v'_0t)^2) + \frac{2(1 + (v'_0t)^2)}{(v'_0xt - y)^2} + \frac{2il(1 + (v'_0t)^2)}{v'_0xt - y} \right] \Bigg|_{l_1}^{l_2},
\end{aligned} \tag{1.97}$$

Из выражений (1.93)–(1.97) можно получить оценки временной зависимости возмущений плотности и электростатического потенциала для больших значений времени:

$$n = \phi \sim \frac{1}{t^3}, \quad n^2 = \phi^2 \sim \frac{1}{t^6}, \quad (\nabla\phi)^2 \sim \frac{1}{t^4}, \quad \Delta\phi \sim -\frac{1}{t^2}, \quad n\nabla\phi \sim \frac{1}{t^5}, \tag{1.98}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} \simeq \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int (\rho_s \nabla\phi)^2 dV \sim \frac{1}{t^5} \sim - \int n [\widehat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\kappa}] \cdot \nabla\phi dV \tag{1.99}$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial t} \simeq \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int (\rho_s \Delta\phi)^2 dV \sim \frac{1}{t^5} \sim - \int n [\widehat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\kappa}] \cdot \nabla\phi dV. \tag{1.100}$$

Из законов сохранения для уравнения Хасегава–Мима (1.91)–(1.92) и оценок (1.98)–(1.100), следует, что энергия и энтропия при больших значениях времени окажутся сосредоточенными преимущественно в электростатическом поле.

В случае одной моды, для которого Фурье преобразование начального условия имеет вид $\phi(t=0, k, l) = \phi_0 \delta(k - k_0) \delta(l - l_0)$, обратным преобразованием Фурье решения (1.31) является

$$\begin{aligned}
\phi(t, x, y, z) &= \frac{i\phi_0}{1 + l_0^2\rho_s^2(v'_0t)^2} \\
&\times \exp\left(\frac{iv_*\pi}{v'_0\rho_s} \frac{\pi}{2}\right) \exp(ixk_{\perp 0} + il_0(y - v'_0xt) + ik_{z0}z) = n(t, x, y, z), \tag{1.101}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\phi(t, x, y, z) &= \frac{i\phi_0 \left[-k_{z0}\mathbf{e}_z - l_0\mathbf{e}_y - (k_{\perp 0} - l_0v'_0t)\mathbf{e}_x \right]}{1 + l_0^2\rho_s^2(v'_0t)^2} \\
&\times \exp\left(\frac{iv_*\pi}{v'_0\rho_s} \frac{\pi}{2}\right) \exp\left(ixk_{\perp 0} + il_0(y - v'_0xt) + ik_{z0}z\right), \tag{1.102}
\end{aligned}$$

$$n^2(t, x, y, z) = \left(\frac{\phi_0}{1 + l_0^2 \rho_s^2 (v_0' t)^2} \right)^2, \quad (1.103)$$

$$(\nabla \phi(t, x, y, z))^2 = \left(\frac{\phi_0}{1 + l_0^2 \rho_s^2 (v_0' t)^2} \right)^2 \left[k_{z0}^2 + l_0^2 + (k_{\perp 0} - l_0 v_0' t)^2 \right], \quad (1.104)$$

$$\begin{aligned} \Delta \phi(t, x, y, z) &= \frac{i\phi_0 \left[-k_{z0}^2 - l_0^2 - (k_{\perp 0} - l_0 v_0' t)^2 \right]}{1 + l_0^2 \rho_s^2 (v_0' t)^2} \\ &\times \exp\left(\frac{iv_* \pi}{v_0' \rho_s} \right) \exp\left(ixk_{\perp 0} + il_0(y - v_0' xt) + ik_{z0}z \right), \end{aligned} \quad (1.105)$$

Из выражений (1.101)–(1.105) можно получить оценки временной зависимости возмущений плотности и электростатического потенциала для больших значений времени:

$$n = \phi \sim \frac{1}{t^2}, \quad n^2 = \phi^2 \sim \frac{1}{t^4}, \quad (\nabla \phi)^2 \sim \frac{1}{t^2}, \quad \Delta \phi \sim -\frac{1}{t^2}, \quad n \nabla \phi \sim \frac{1}{t^3}, \quad (1.106)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} \simeq \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int (\rho_s \nabla \phi)^2 dV \sim \frac{1}{t^3} \sim - \int n [\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\kappa}] \cdot \nabla \phi dV \quad (1.107)$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial t} \simeq \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int (\rho_s \Delta \phi)^2 dV \sim \frac{1}{t^3} \sim - \int n [\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\kappa}] \cdot \nabla \phi dV. \quad (1.108)$$

Из законов сохранения для уравнения Хасегава–Мима (1.91)–(1.92) и оценок (1.106)–(1.108), следует, что энергия и энтрофия, связанные с одной волной, как и в случае пакета волн окажутся сосредоточенными преимущественно в электростатическом поле. Однако в одномодовом случае их затухание со временем происходит медленнее, чем в случае пакета волн.

1.6 Временная эволюция вынужденных возмущений дрейфовых волн в полуограниченном сдвиговом течении плазмы.

Наиболее простой моделью дрейфовой турбулентности, которая включает ее основные свойства, является модель Хасегавы–Мима, основанная на уравнении

(1.27) для электростатического потенциала. Предполагаем, что полупространство $x \geq 0$ занимает однородное сдвиговое течение плазмы, имеющее скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ равную

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = v'_0 x \mathbf{e}_y + \frac{c}{B} [\mathbf{b} \times \nabla \phi(\mathbf{r}, t)] , \quad (1.109)$$

с $v'_0 = \text{const}$. Уравнение (1.27) будем решать при начальном условии $\phi(\tau = 0, x, y) = \phi_0(x, y)$, и граничных условиях

$$\phi(\tau, x = 0, y) = \tilde{\phi}(\tau, y); \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = \tilde{\phi}'(\tau, y) .$$

Для решения начальной задачи для уравнения (1.27) оказывается, как и прежде, целесообразным выполнить замену переменных (1.5), приводящую к исключению из уравнения (1.27) зависимость от координаты x , связанную со сдвиговым течением. Выполним в преобразованном к переменным τ, ξ, η уравнении (1.27) преобразование Фурье по переменной η и одностороннее ($\xi \geq 0$) преобразование Фурье по ξ , т.е. перейдем к переменной $\phi(\tau, k, l)$, где

$$\phi(\tau, k, l) = \int_0^\infty d\xi \int_{-\infty}^\infty d\eta e^{-ik\xi - il\eta} \phi(\tau, \xi, \eta) .$$

В результате получим следующее уравнение для потенциала [33] $\phi(\tau, k, l)$:

$$\left[1 + \rho_s^2 \left(l^2 + (k - v'_0 l \tau)^2 \right) \right] \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - 2\rho_s^2 (k - v'_0 l \tau) v'_0 l \phi(\tau, k, l) + ilv_{de} \phi(\tau, k, l) = \Phi(\tau, l) , \quad (1.110)$$

где слагаемое $\Phi(\tau, l)$ определено граничными условиями при $x = 0$ и равно

$$\Phi(\tau, l) = -\rho_s^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\phi}(\tau, x = 0, l) - i(k + 2v'_0 l \tau) \tilde{\phi}(\tau, x = 0, l) \right\} . \quad (1.111)$$

Решением уравнения (1.110) является

$$\begin{aligned}
\phi(\tau, k, l) &= \phi_0(0, k, l) \frac{1 + \rho_s^2(k^2 + l^2)}{1 + \rho_s^2 l^2 + \rho_s^2(k - v_0' l \tau)^2} \\
&\times \exp \left[-i \frac{lv_{de}}{v_0' l \rho_s \sqrt{1 + l^2 \rho_s^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\rho_s(v_0' l \tau - k)}{\sqrt{1 + l^2 \rho_s^2}} + \operatorname{arctg} \frac{k \rho_s}{\sqrt{1 + l^2 \rho_s^2}} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{1 + \rho_s^2 l^2 + \rho_s^2(k - v_0' l \tau)^2} \int_0^\tau d\tau_1 \Phi(\tau_1, l) \\
&\times \exp \left[-i \frac{lv_{de}}{v_0' l \rho_s \sqrt{1 + l^2 \rho_s^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\rho_s(v_0' l \tau - k)}{\sqrt{1 + l^2 \rho_s^2}} + \operatorname{arctg} \frac{k \rho_s}{\sqrt{1 + l^2 \rho_s^2}} \right) \right].
\end{aligned} \tag{1.112}$$

В условиях достаточно сильного градиента скорости, наблюдаемого на краю плазмы, где $v_0' \gtrsim lv_{de}$, уже при достаточно малом времени τ решение (1.112) можно приближенно представить в виде

$$\begin{aligned}
\phi(\tau, k, l) &\approx \phi_0(0, k, l) \frac{1 + \rho_s^2(k^2 + l^2)}{1 + \rho_s^2 l^2 + \rho_s^2(k - v_0' l \tau)^2} \\
&\times \exp \left[-i \frac{lv_{de}}{v_0' l \rho_s \sqrt{1 + l^2 \rho_s^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\rho_s(v_0' l \tau - k)}{\sqrt{1 + l^2 \rho_s^2}} \right) \right] \\
&- \frac{\rho_s^2}{1 + \rho_s^2 l^2 + \rho_s^2(k - v_0' l \tau)^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \phi(\tau, x = 0, l) - i(k + 2v_0' l \tau) \phi(\tau, x = 0, l) \right].
\end{aligned} \tag{1.113}$$

Из (1.113) следует, что в плазме с сильным широм скорости начальные возмущения, возникшие в сдвиговом течении, затухают как t^{-2} , в то же время колебания плазмы, возбужденные вне сдвигового течения и определенные граничными условиями, распространяются в области $x > 0$ с затуханием как t^{-1} . Поэтому наблюдаемые в сдвиговом течении колебания могут иметь своим источником внутреннюю область плазмы.

1.7 Выводы.

В этой главе найдено решение начальной задачи для линеаризованной системы уравнений Хасегавы–Вакатани для течения плазмы с однородным сдвигом скорости. Полученные результаты показывают, что дрейфовая турбулентность холодной пограничной плазмы со сдвиговым течением имеет очень сложную структуру, которая далека от общепринятой модальной структуры.

Получено, что переход дрейфовой волны в конвективную ячейку является врожденным свойством немодальной эволюции во времени дрейфовой волны в сдвиговом течении. В случае бесстолкновительной плазмы (или адиабатичных электронов) сдвиговое течение ведет к обращению в нуль компонентов групповой скорости (1.46), (1.47) и блокированию волнового пакета на уровне (1.43). Это явление отсутствует в плазме без сдвигового течения и может быть важным при анализе наблюдаемой корреляции между течениями на краю плазмы и улучшенным удержанием плазмы (см. также [42]). В режиме слабых столкновений (или квазиа-

Рис. 1.11: Эволюция во времени интенсивности колебаний плотности плазмы при L–H переходе в краевом слое плазмы в токамаке Doublet–IID (a) [6] и торсотрона Ураган 3М (b) [39].

диабатичности) однородное сдвиговое течение является фактором, препятствующим развитию обычной модальной резистивной дрейфовой неустойчивости. Эта неустойчивость существует только в случае слабого шира скорости, когда условие (1.72) не выполнено. Только в этом случае допустимо применение модального подхода в анализе резистивной дрейфовой турбулентности. В случае более сильного шира (уравнение 1.72)) немодальные эффекты определяют временную эволюцию возмущений, начиная с момента времени меньшего чем γ^{-1} . При этих условиях амплитуда дрейфовых колебаний убывает очень быстро как $\exp(-\alpha t^2)$. Поэтому процесс подавления дрейфово–резистивной неустойчивости сдвиговым течением является немодальным процессом. Долговременная эволюция начальных возмущений в случае $S \gg 1$ будет определяться немодальным решением (1.64) и блокировка волновых пакетов на их уровнях застоя и окончательная трансформация дрейфовых волн в конвективные ячейки являются врожденными свойствами этой эволюции. Поскольку условием стабилизации дрейфовой неустойчивости вследствие нелинейной усиленной декорреляции [11, 12] оказывается условие $|v'_0| > \gamma$, соответствующая нелинейная теория усиленной декорреляции должна быть построена на немодальных решениях, полученных в этой Главе.

Рис. 1.12: Эволюция во времени спектра колебаний плотности плазмы при L–H переходе в краевом слое плазмы токамака Doublet–IID [6].

Важно отметить, что немодальные эффекты отсутствуют у возмущений с нулевым компонентом волнового вектора вдоль сдвигового течения (зональных течений), т.е. для $l = 0$. Немодальные эффекты становятся тем сильнее, чем больше значение этого компонента волнового вектора. Поэтому немодальные эффекты прежде всего приводят к подавлению коротковолновой части спектра дрейфовых волн. Именно это наблюдается в экспериментах, проведенных на токамаке Doublet-III D [6], торсотроне «Ураган-3М» [39], где во время перехода в режим улучшенного удержания происходило (см. Рис.1.11 и Рис.1.12) подавление коротковолновых колебаний плотности при незначительном изменении уровня длинноволновых. В тоже время явление усиленной нелинейной декорреляции приводит, как отмечено в работе [11] к преимущественному подавлению длинноволновой части спектра. Поэтому можно полагать, что именно немодальные эффекты были ответственны за подавление мелкомасштабной дрейфовой турбулентности в экспериментах [39].

Строго немодальная структура возмущений (уравнение 1.79)) получается для случая $C \lesssim 1, S \sim 1$, а также для сильно столкновительного (гидродинамического) режима или для режима достаточно сильного сдвига течения (случай когда $C \ll 1$). В этом режиме неустойчивость отсутствует и возмущения эволюционируют как конвективные ячейки, которые затухают во времени как t^{-2} . При этом энергия и энтропия оказываются сосредоточенными в электростатическом поле.

В лабораторной системе «частота» (1.43) и «волновое число» (1.44) являются зависящими от времени. Для условий границы плазмы у токамака (см. например [7]) $v'_0 \geq \omega_*$ и «разброс частоты» будет соизмерим с «основной частотой». Это должно привести к широкому очертанию спектральной линии возмущений, которое не связано с эффектами сильной турбулентности.

Сдвиговое течение плазмы приводит к немодальной временной эволюции не только возмущения, возникшие в некоторый начальный момент в объёме сдвигового течения, но и непрерывно возникающее и распространяющееся в сдвиговом течении плазмы синусоидальное возмущение границы. Амплитуда этих вынуж-

денных возмущений также спадает со временем, однако это убывание более медленное, как t^{-1} , чем убывание амплитуды, как t^{-2} , у начальных возмущений.

Глава 2

Временная эволюция дрейфово–альфвеновских волн в однородном сдвиговом течении неоднородной плазмы с холодными ионами

2.1 Введение.

Мелкомасштабные электромагнитных дрейфовые тороидальные моды, также как и как и рассмотренные в Главе 1 электростатические дрейфовые волны и неустойчивости, являются источником аномального переноса в тороидальных удерживающих системах [41]. Их стандартная теория основывается на так называемом «баллоном преобразовании» [43, 44], являющимся наиболее эффективным методом для вычисления спектра и глобальной структуры дрейфовых баллонных мод [45].

Экспериментальное открытие перехода из режима слабого удержания в режим улучшенного удержания, в котором было обнаружено подавление турбулентности и снижение аномального переноса, открыло новую страницу в теории дрейфово–альфвеновских волн и дрейфово–альфвеновской турбулентности в тороидальных системах удержания плазмы. Как отмечено в Главе 1, вместе с переходом в состояние улучшенного удержания (H–режим), в плазме токамака возникают большие градиенты у радиального электрического поля, и сильные полоидальные сдвиговые течения плазмы [38]. Большие радиальные градиенты электрического поля ограничены узким слоем на краю плазмы, в котором длина L_v радиального градиента скорости (характерная длина шира скорости), L_v , оказывается значительно меньшей, чем характерная длина L_B шира магнитного поля. Фактически градиент скорости в этом слое оказывается порядка или даже

больше, чем характерная частота дрейфовой волны. Тогда представляется естественным, что природа и эволюция низкочастотных волн и неустойчивостей в этой области будет отличаться от их эволюции в основной части плазмы, где именно шир магнитного поля определяет пространственную структуру и временную эволюцию этих волн. К сожалению, метод «балонного преобразования» перестает быть полезным для задач, которые включают течения плазмы с сильным сдвигом, и может быть полезным только для нахождения спектров и инкрементов неустойчивостей в пределе очень слабого шира скорости [47]– [51]. Поэтому для анализа плазмы с сильным сдвиговым течением должны быть развиты другие методы.

В работе [32], материалы которой составили содержание Главы 1, был предложен новый подход в теории дрейфовых волн, применимый для исследований течений плазмы с большими градиентами скорости, для которых $L_v \ll L_B$. Характер флуктуаций для таких систем определяется сдвиговым течением, а слабым влиянием шира магнитного поля можно пренебречь. В [32] также показано, что радиальное волновое число дрейфовой волны растет со временем в сдвиговых течениях. Поскольку далее становятся важными нелинейные эффекты для образовавшихся немодальных возмущений, незначительный эффект магнитного шира с течением времени становится еще более несущественным. В Главах 2 и 3, материалы которых основаны на работах [54, 56], эти исследования обобщены на электромагнитные волны и неустойчивости. В данной Главе будет проведено немодальное исследование дрейфово–альфвеновских волн в сдвиговом течении плазмы с холодными ионами. Известно, что дрейфово–альфвеновская волна рассматривается как важный компонент низкочастотной турбулентности плазмы, которая может быть ответственна за аномальный перенос в тороидальных системах удержания плазмы. Знание структуры альфвеновских волн, их свойств устойчивости в краевой плазме с сильным широм скорости окажет существенное влияние на понимание природы H–моды. Так как краевой слой довольно узок, мы используем модель плоскостройной плазмы низкого ($m_e/m_i \gg \beta$) и умеренного ($m_e/m_i \ll \beta \ll 1$) давления, где $\beta = 4\pi P/B^2$ является отношением теплово-

го давления к магнитному. Исходя из экспериментальных данных мы полагаем, что характерная длина L_v радиального градиента скорости является значительно меньшей, чем характерная длина радиального градиента удерживающего магнитного поля L_B . Фактически мы полагаем, что удерживающее магнитное поле бесшировое и однородное. В разделе 2.1 получены основные уравнения, описывающие временную эволюцию дрейфовых Альфвеновских волн в плазме с однородным сдвиговым течением. Эти уравнения получены на основе дрейфового приближения для уравнений двухжидкостной магнитогидродинамики [52, 53]. Временная эволюция пространственной Фурье гармоники исследуется как начальная задача без использования каких либо спектральных преобразований по времени. В разделах 2.2 и 2.3 проанализированы решения начальной задачи для различных интервалов времени и прослежена эволюция дрейфовых и альфвеновских волн в плазме с холодными ионами, $T_i \ll T_e$. Случаи плазмы низкого давления, для которой $\beta \ll m_e/m_i$, и плазмы умеренного давления, $m_e/m_i \ll \beta \ll 1$, рассмотрены отдельно. В Главе 3 рассмотрена плазма с горячими ионами, для которой температуры ионов T_i и электронов T_e сравнимы, $T_i \leq T_e$. В такой плазме возможно развитие резистивной дрейфово–альфвеновской неустойчивости и гидродинамической дрейфово–альфвеновской неустойчивости [58].

2.2 Основные уравнения.

Основными уравнениями, используемыми для исследования дрейфово–альфвеновских мод плазмы являются [53] уравнение движения электронов вдоль магнитного поля

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_e \cdot \nabla \right) v_{e\parallel} = -\frac{eE_{\parallel}}{m_e} - \frac{e}{cm_e} \mathbf{b} \cdot [\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}], \quad (2.1)$$

уравнение квазинейтральности для плотности тока

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad \text{или} \quad \nabla_{\perp} \mathbf{j}_{\perp} + \nabla_{\parallel} \mathbf{j}_{\parallel} = 0, \quad (2.2)$$

уравнения для возмущений электронного давления \tilde{p}_e и ионного давления \tilde{p}_i ,

$$\frac{d\tilde{p}_e}{dt} + \Gamma \tilde{p}_e \nabla \cdot (\mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{de} + \mathbf{v}_{\parallel e}) = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{d\tilde{p}_i}{dt} + \Gamma\tilde{p}_i\nabla \cdot (\mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{di}) = 0. \quad (2.4)$$

В уравнениях (2.1)–(2.4)

$$\mathbf{v}_E = \frac{c}{B_0} [\mathbf{b} \times \nabla\tilde{\phi}], \quad \mathbf{v}_{de} = -\frac{c}{en_e B_0} [\mathbf{b} \times \nabla P_e], \quad \mathbf{v}_{di} = \frac{c}{e_i n_i B_0} [\mathbf{b} \times \nabla P_i]$$

$$\mathbf{j}_\perp = \mathbf{j}_d + \mathbf{j}_{pi}, \quad (2.5)$$

где

$$\mathbf{j}_d = \frac{c}{B} [\mathbf{b} \times \nabla (P_e + P_i)]$$

– ток диамагнитного дрейфа,

$$\mathbf{j}_{pi} = n_{0e} e_i \mathbf{v}_{pi} = -\frac{c^2 n_{0i} m_i}{B^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{di} + \mathbf{v}_{\parallel i}) \cdot \nabla \right) \nabla_\perp \tilde{\phi}$$

– ток поляризационного дрейфа,

$$\mathbf{j}_\parallel = en_e (\mathbf{v}_{i\parallel} - \mathbf{v}_{e\parallel}) = \frac{c}{4\pi} (\nabla_\perp \times \tilde{\mathbf{B}}_\perp) = -\frac{c}{4\pi} \Delta_\perp \tilde{\mathbf{A}}_\parallel. \quad (2.6)$$

В дрейфовом приближении такая система уравнений сводится к следующей системе уравнений для параллельной компоненты возмущенного магнитного потенциала \tilde{A}_\parallel , электростатического потенциала $\tilde{\phi}$, и для \tilde{p}_e и \tilde{p}_i [53],

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\tilde{A}_\parallel - \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \nabla_\perp^2 \tilde{A}_\parallel \right) + v_{de} \frac{\partial \tilde{A}_\parallel}{\partial y} \\ = -c \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} + \frac{c}{en_{e0}} \frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial z} + \frac{c}{en_{e0} B_0} \nabla \tilde{A}_\parallel \cdot [\mathbf{b}_0 \times \nabla \tilde{p}_e], \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\frac{d\tilde{p}_e}{dt} + en_{e0} v_{de} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} + \frac{c\Gamma T_{e0}}{4\pi e} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{B_0} [\nabla \tilde{A}_\parallel \times \mathbf{b}_0] \cdot \nabla \right) \nabla_\perp^2 \tilde{A}_\parallel = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{d\tilde{p}_i}{dt} - en_{i0} v_{di} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} = 0, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + v_{di} \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla_\perp^2 \tilde{\phi} = -\frac{c}{en_{i0} B_0} \nabla_\perp ([\mathbf{b}_0 \times \nabla \tilde{p}_i] \cdot \nabla) \nabla_\perp \tilde{\phi} - \\ \nabla_\perp (\mathbf{v}_{i\parallel} \cdot \nabla) \nabla_\perp \tilde{\phi} - \frac{v_A^2}{c} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{B_0} [\nabla \tilde{A}_\parallel \times \mathbf{b}_0] \cdot \nabla \right) \nabla_\perp^2 \tilde{A}_\parallel. \end{aligned} \quad (2.10)$$

В уравнениях (2.7) – (2.10) введены следующие обозначения: ω_{pe} – электронная плазменная частота, v_A – альфвеновская скорость, $\Gamma = 5/3$ – адиабатическая постоянная, $v_{de(di)} = \mp c / (en_{e0}B_0) dP_{e0(i0)}/dx$ – электронная (ионная) диамагнитная скорость, $P_{e0(i0)}(x)$ – неоднородное невозмущенное электронное (ионное) давление, $P_{e(i)} = P_{e0(i0)}(x) + \tilde{p}_{e(i)}$. Оператор d/dt в (2.1) – (2.4) определяется для сдвигового течения перпендикулярного к магнитному полю $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{b}_0$ (направленный вдоль оси z), с однородным сдвигом, т.е., $\mathbf{v}_0(x) = v'_0 x \mathbf{e}_y$, где v'_0 является независимым от x , как

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v'_0 x \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{v}_E \cdot \nabla \quad (2.11)$$

$$\text{с } \mathbf{v}_E = (c/B_0) [\mathbf{b}_0 \times \nabla \tilde{\phi}].$$

Общепринятый путь решения этой системы уравнений или ее частных форм состоит в предположении, что возмущенные величины изменяются как $(\tilde{A}_{\parallel}, \tilde{\phi}, \tilde{p}_e, \tilde{p}_i) \sim (\tilde{A}_{\parallel}(x), \tilde{\phi}(x), \tilde{p}_e(x), \tilde{p}_i(x)) \exp(ik_y y + ik_z z - i\omega t)$. Известно, однако, (см., на пример, работу [16]) что для случая сдвигового течения решения такого модального вида не дают полного решения задачи и более строгим в этом случае будет решение начальной задачи для рассматриваемой системы. Применение прямого и обратного преобразования Лапласа по времени формально дает решение начальной задачи [16]. Обратное интегральное преобразование Лапласа, однако, оказывается сложным для вычисления временной эволюции для конечных значений времени. Как правило этот метод дает аналитические результаты только для асимптотически больших времен. Эти приближенные результаты могут стать бесполезными при сравнении важности нелинейных и линейных эффектов во временной эволюции неустойчивости плазмы в сдвиговом течении, поскольку все промежуточные временные процессы во временной эволюции, которые в некоторое определенное время могут быть более важными чем модальные или нелинейные эффекты, пренебрежены. Следовательно, маловероятно получить на этом пути аналитические решения, применимые для конечного времени и анализировать на этой основе временную эволюцию дрейфово–альфвеновских волн или стабилизацию дрейфово–альфвеновских неустойчивостей.

Здесь мы используем подход, развитый в Главе 1. Он дает возможность

сравнительно просто исследовать начальную задачу для дрейфово-альфвеновских возмущений плазмы. В Главе 1 показано, что для течений с однородным сдвигом, т.е. для $v'_0 = \text{const}$, решение начальной задачи значительно упрощается преобразованием к конвективным координатам τ, ξ, η, z (1.8). В новых координатах линеаризованная система (2.7) – (2.10) для обезразмеренных переменных $\phi = (e\tilde{\phi}/T_e)$, $A_{\parallel} = (e\tilde{A}_{\parallel}/T_e)$, $p_e = (\tilde{p}_e/n_{0e}T_e)$, $p_i = (\tilde{p}_i/n_{0i}T_i)$ становится

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(A_{\parallel} - \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \nabla_{\perp}^2 A_{\parallel} \right) + v_{de} \frac{\partial A_{\parallel}}{\partial \eta} = -c \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + c \frac{\partial p_e}{\partial \zeta}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial \tau} + v_{de} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \Gamma \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \frac{v_{Te}^2}{c} \frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla_{\perp}^2 A_{\parallel} = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \tau} - v_{di} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0, \quad (2.14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + v_{di} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \nabla_{\perp}^2 \phi = v'_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial p_i}{\partial \xi} - v'_{0\tau} \frac{\partial p_i}{\partial \eta} \right) - \frac{v_A^2}{c} \frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla_{\perp}^2 A_{\parallel}, \quad (2.15)$$

Оператор ∇_{\perp}^2 в конвективных переменных оказывается зависящим от времени и равен

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - v'_{0\tau} \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2. \quad (2.16)$$

Новые координаты дают возможность преобразовать зависимости от пространственных координат в зависимости от времени, возникающие как результат учета деформации волн сдвиговым течением. К ставшей пространственно однородной системе может быть применено преобразование Фурье по новым пространственным переменным, ξ, η, z , в виде

$$A_{\parallel}(\tau, k_{\perp}, l, k_z) = \iiint d\xi d\eta d\zeta A_{\parallel}(\tau, \xi, \eta, \zeta) \exp \{ -ik_{\perp}\xi - il\eta - ik_z\zeta \}. \quad (2.17)$$

с учетом условия, что $k_{\perp} L_{pe,i} \gg 1$ где $L_{pe,i}$ – масштаб длины неоднородного равновесного электронного (ионного) давления. В результате получаем следующую

систему уравнений для пространственных Фурье гармоник A_{\parallel} , ϕ , p_e и p_i ,

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\left(1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1 + T^2) \right) A_{\parallel} \right] + i C_e A_{\parallel} = -i \frac{c}{v_A} S \phi + i \frac{c}{v_A} S p_e, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial T} + i C_e \phi = i \Gamma \frac{c}{v_A} \frac{v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2} S l^2 (1 + T^2) A_{\parallel}, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial T} = i C_i \phi, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial((1 + T^2)\phi)}{\partial T} + i C_i (1 + T^2)\phi = -T p_i - i \frac{v_A}{c} S (1 + T^2) A_{\parallel}. \quad (2.21)$$

В системе (2.18) – (2.21) безразмерное время T и безразмерные параметры S , C_e и C_i определяются как

$$T = v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l}, \quad S = \frac{k_z v_A}{v'_0}, \quad C_{e,i} = \frac{l v_{de,di}}{v'_0}. \quad (2.22)$$

Система (2.18) – (2.21) вместе с Фурье преобразованием начальных данных, $A_{\parallel}(0, k_{\perp}, l, k_z)$, $p_e(0, k_{\perp}, l, k_z)$, $p_i(0, k_{\perp}, l, k_z)$ и $\phi(0, k_{\perp}, l, k_z)$ составляет общую начальную задачу. В данной Главе будет рассмотрена временная эволюция дрейфово–альфвеновских волн в плазме с холодными ионами ($T_i \ll T_e$), а в Главе 3 рассматривается эволюция дрейфово–альфвеновских неустойчивостей в плазме с горячими ионами ($T_i \leq T_e$) в случае «слабого» сдвигового течения, когда $S \gg 1$ и в режиме сильного сдвига, когда шир скорости оказывается больше, чем частота альфвеновской волны.

В данной Главе альфвеновские волны рассматриваются как в однородной так и в неоднородной плазме (в локальном приближении) с холодными ионами, $T_i \rightarrow 0$. Рассматриваются отдельно случаи плазмы низкого давления, для которого $\beta \ll m_e/m_i$, и умеренного давления, $1 \gg \beta \gg m_e/m_i$, где $\beta = 4\pi P/B^2$ – отношение теплового давления к давлению магнитного поля.

2.3 Временная эволюция альфвеновских волн в однородной плазме низкого давления ($\beta \ll m_e/m_i$).

В случае плазмы низкого давления, $\beta \ll m_e/m_i$, можно положить, что $P_{i0} \rightarrow 0$ и $P_{e0} \rightarrow 0$. В этом случае система уравнений (2.18) – (2.21) может быть приведена к следующей системе уравнений для скалярного и векторного потенциалов

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1 + T^2) A_{\parallel} \right) = -i \frac{cS}{v_A} \phi, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \left((1 + T^2) \phi \right) = -i \frac{v_A S}{c} (1 + T^2) A_{\parallel}. \quad (2.24)$$

Учитывая, что $c^2/\omega_{pe}^2 = (v_A^2/v_{Te}^2) \rho_s^2$, эту систему (2.23)–(2.24) можно привести к следующему уравнению

$$\frac{d^2 \left((1 + T^2) \phi \right)}{dT^2} + S^2 \frac{v_{Te}^2}{v_A^2} \frac{1}{l^2 \rho_s^2} \phi = 0. \quad (2.25)$$

Если в уравнении (2.25) перейти к физическому времени τ и в полученном уравнении положить $v'_0 = 0$ и сделать преобразование Фурье по времени, то получим следующее дисперсионное уравнение, которое определяет так называемую «инерциальную» альфвеновскую волну (Inertial Alfvén wave) [55]:

$$\omega^2 = \frac{v_A^2 k_z^2}{1 + \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} (l^2 + k_{\perp}^2)}.$$

Для больших времен, $T \gg 1$, уравнение (2.25) может быть приближенно решено для электростатического и магнитного потенциалов,

$$\phi(T, k_{\perp}, l, k_z) \approx \frac{1}{T^{3/2}} \left(C_1(k_{\perp}, l, k_z) T^{i\chi} + C_2(k_{\perp}, l, k_z) T^{-i\chi} \right), \quad (2.26)$$

$$A_{\parallel}(T, k_{\perp}, l, k_z) \approx \frac{ic}{k_z v_A^2} \frac{1}{T^{5/2}} \left(\frac{C_1(k_{\perp}, l, k_z)}{\frac{1}{2} + i\chi} T^{i\chi} + \frac{C_2(k_{\perp}, l, k_z)}{\frac{1}{2} - i\chi} T^{-i\chi} \right), \quad (2.27)$$

где $\chi = \sqrt{\omega^2/(v'_0)^2 - 1/4}$ и ω – частота модальной инерциальной альфвеновской волны. Из решений (2.26), (2.27) следует, что сдвиговое решение фундаментально изменяет поведение по времени «инерциальной» альфвеновской волны от стандартной модальной зависимости к степенной зависимости времени. Алгебраическое затухание магнитного потенциала оказывается более быстрым во времени, чем электростатического потенциала. Это свойство – различные зависимости от времени различных возмущений в линейной системе, является чисто немодальным элементом, внесенным сдвиговым течением.

2.3.1 Временная эволюция плотности энергии альфвеновских волн в сдвиговом течении однородной плазмы низкого давления ($\beta \ll m_e/m_i$) с холодными ионами.

Из системы уравнений (2.18) – (2.21) в случае плазмы низкого давления, ($\beta \ll m_e/m_i$, $P_{i0} \rightarrow 0$ и $P_{e0} \rightarrow 0$) можно получить следующий закон сохранения полной энергии инерциальных альфвеновских волн

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \left[(\nabla \phi)^2 + \frac{\rho_s^2}{c^2 v_{Te}^2} (v_A^2 \Delta_{\perp} A_{\parallel})^2 \right] dV = 0. \quad (2.28)$$

Рис. 2.1: Изменение амплитуды потенциала $\phi(T)$ инерциальной альфвеновской волны во времени, определенное уравнением (2.26), в сдвиговом течении плазмы ($\chi = 5$, $C_1 = C_2 = 1$).

Введем обозначение $v_A^2 \cdot \Delta_{\perp} A_{\parallel} = \Psi(\mathbf{r}, t)$ и выполнив обратное преобразование Фурье по l и предположив, что спектр по l ограничен в пределах $l_1 \leq l \leq l_2$, получим следующие выражения для возмущений потенциала $\phi(x, y, z, t)$ и для величины $\Psi(x, y, z, t)$:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z dk_{\perp} e^{ik_z z + ik_{\perp} x} \frac{i}{v_0' t x - y} \exp \left[il \left(y - v_0' t x \right) \right] \quad (2.29) \\ & \times \left[C_1(k_{\perp}, l, k_z) \left(v_0' t - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{i\chi - 3/2} + C_2(k_{\perp}, l, k_z) \left(v_0' t - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-i\chi - 3/2} \right] \Big|_{l_1}^{l_2} \\ & + \mathcal{O} \left(\frac{1}{(v_0' t x - y)^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z, t) = & - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z dk_{\perp} e^{ik_z z + ik_{\perp} x} \frac{c v_0' l^2}{k_z (v_0' t x - y)} \exp \left[il \left(y - v_0' t x \right) \right] \quad (2.30) \\ & \times \left[C_1 \left(v_0' t - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{i\chi - 3/2} \left(i\chi - \frac{1}{2} \right) - C_2 \left(i\chi + \frac{1}{2} \right) \left(v_0' t - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-i\chi - 3/2} \right] \Big|_{l_1}^{l_2} \\ & + \mathcal{O} \left(\frac{1}{(v_0' t x - y)^2} \right). \end{aligned}$$

Рис. 2.2: Изменение амплитуды потенциала $\phi(T)$ инерциальной альфвеновской волны во времени, определенное уравнением (2.26), в сдвиговом течении плазмы ($\chi = 1$, $C_1 = C_2 = 1$).

Учитывая (2.29) и (2.30) в законе сохранения энергии (2.28) получаем, что сдвиговое течение приводит к очень быстрому убыванию скорости изменения плотности энергии возмущений, а именно:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int (\nabla \phi)^2 dV \sim t^{-6}, \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\rho_s^2}{c^2 v_{Te}^2} (v_A^2 \Delta_{\perp} A_{\parallel})^2 dV \sim t^{-6}. \quad (2.32)$$

Отсюда следует, что несмотря на различные законы изменения потенциалов ϕ и A_{\parallel} во времени, плотности электростатической и электромагнитной энергии у этих волн изменяются во времени по одному и тому же закону.

В одномодовом режиме обратное преобразование Фурье решений (2.26) – (2.27) имеет вид:

$$\begin{aligned} \phi(t, x, y, z) \approx & \left(C_1(k_{\perp 0}, l_0, k_{z0}) \left(v_0' t - \frac{k_{\perp 0}}{l_0} \right)^{i\chi - \frac{3}{2}} \right. \\ & \left. + C_2(k_{\perp 0}, l_0, k_{z0}) \left(v_0' t - \frac{k_{\perp 0}}{l_0} \right)^{-i\chi - \frac{3}{2}} \right) \exp \left(i x k_{\perp 0} + i l_0 (y - v_0' x t) + i k_{z0} z \right), \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} A_{\parallel}(t, x, y, z) \approx & \frac{ic}{k_{z0} v_A^2} \left(\frac{C_1(k_{\perp 0}, l_0, k_{z0})}{\frac{1}{2} + i\chi} \left(v_0' t - \frac{k_{\perp 0}}{l_0} \right)^{i\chi - \frac{5}{2}} \right. \\ & \left. + \frac{C_2(k_{\perp 0}, l_0, k_{z0})}{\frac{1}{2} - i\chi} \left(v_0' t - \frac{k_{\perp 0}}{l_0} \right)^{-i\chi - \frac{5}{2}} \right) \exp \left(i x k_{\perp 0} + i l_0 (y - v_0' x t) + i k_{z0} z \right), \end{aligned} \quad (2.34)$$

Учитывая (2.33) и (2.34) в законе сохранения энергии (2.28) получаем, что сдвиговое течение приводит к очень быстрому убыванию скорости изменения плотности энергии возмущений, а именно:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int (\nabla \phi)^2 dV \sim t^{-4}, \quad (2.35)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\rho_s^2}{c^2 v_{Te}^2} (v_A^2 \Delta_{\perp} A_{\parallel})^2 dV \sim t^{-4}. \quad (2.36)$$

Как и в случае дрейфовых волн скорость изменения плотности энергии пакета волн убывает во времени быстрее, чем у одной моды.

2.4 Временная эволюция альфвеновских волн в плазме с умеренным давлением ($1 \gg \beta \gg m_e/m_i$) и холодными ионами.

Для холодных ионов, $T_i \rightarrow 0$, но для умеренного давления электронов, система (2.18) – (2.21) может быть преобразована в дифференциальное уравнение третьего порядка для электростатического потенциала $\phi(\tau, k_\perp, l, k_z)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left\{ \left(\frac{1}{1+T^2} + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} \right) \frac{\partial}{\partial T} [(1+T^2)\phi] \right\} + S^2 \frac{\partial}{\partial T} [(1+l^2 \rho_s^2 (1+T^2))\phi] \\ + iC_e S^2 \phi + iC_e \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{1}{1+T^2} \frac{\partial}{\partial T} [(1+T^2)\phi] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Уравнение (2.37), вместе с начальными условиями, полученными с учетом уравнений (2.18)–(2.21),

$$\phi(T, k_\perp, l, k_z) \Big|_{T=-k_\perp/l} = \phi(0), \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial T} \Big|_{T=-k_\perp/l} = k_z v_A \left[\frac{2}{S} \frac{l k_\perp}{k_\perp^2 + l^2} \phi(0) - i \frac{v_A}{c} A_\parallel(0) \right], \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial T^2} \Big|_{T=-k_\perp/l} = k_z^2 v_A^2 p_e(0) + k_z^2 v_A^2 \left[\frac{8}{S^2} \frac{(l k_\perp)^2}{(k_\perp^2 + l^2)^2} - \frac{2}{S^2} \frac{l^2}{l^2 + k_\perp^2} - 1 \right] \phi(0) \\ - \frac{1}{S} \frac{v_A}{c} k_z^2 v_A^2 \left[C + 2i \frac{l k_\perp}{k_\perp^2 + l^2} \right] A_\parallel(0), \end{aligned} \quad (2.40)$$

составляет начальную задачу для линейных дрейфовых и альфвеновских волн в плазме со сдвиговым течением и с холодными ионами.

В отсутствии сдвигового течения уравнение (2.37) описывает зацепление электронных дрейфовых и альфвеновских волн за счет электромагнитных эффектов:

$$(\omega - \omega_{*e}) (\omega^2 - k_\parallel^2 v_A^2) = \Gamma \omega k_\parallel^2 v_A^2 k_\perp^2 \rho_s^2, \quad (2.41)$$

здесь k_\parallel и k_\perp – проекции волнового вектора возмущений вдоль и поперек внешнего магнитного поля соответственно, $\omega_{*e} = k_y v_{*e}$ – электронная дрейфовая частота. В предельных случаях дисперсионное уравнение (2.41) описывает в электростатическом пределе $k_\parallel \rightarrow \infty$ электронные дрейфовые волны $\omega = \omega_{*e} / (1 + k_\perp^2 \rho_s^2)$, а в пренебрежении дрейфовыми эффектами ($\omega \gg \omega_{*e}$) – альфвеновские волны

$\omega^2 = k_{\parallel}^2 v_A^2 (1 + k_{\perp}^2 \rho_s^2)$. В случае $k_y = k_{\parallel} = 0$ из (2.41) получается $\omega = 0$, что соответствует зональному течению или зональному магнитному полю. При учете диссипативных эффектов (резистивности, вязкости) такие моды с нулевой частотой затухают.

В пределе слабого сдвигового течения, т.е., $S \gg 1$, начальная задача может быть решена в эйкональном приближении,

$$\phi(T) = \frac{1}{1+T^2} \exp\left(S \int_{-\frac{k_{\perp}}{l}}^T dT' f(T')\right), \quad (2.42)$$

где

$$f(T) = f_0(T) + \frac{1}{S} f_1(T) + \frac{1}{S^2} f_2(T) + \dots \quad (2.43)$$

Из этого общего решения мы сначала выделим колебания возникающие в однородной плазме ($C_e = 0$), и затем рассмотрим дрейфовые волны в неоднородной плазме ($C_e \neq 0$).

2.4.1 Однородная плазма с холодными ионами.

Если $C_e = 0$ (случай однородной плазмы), уравнение (2.37) может быть один раз проинтегрировано. В результате получаем неоднородное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \left(\frac{1}{1+T^2} + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} \right) \frac{\partial}{\partial T} [(1+T^2) \phi] \right\} + S^2 [(1+l^2 \rho_s^2 (1+T^2))] \phi \\ = S^2 (\rho_s^2 (l^2 + k_{\perp}^2) \phi(0) + p_e(0)) . \end{aligned} \quad (2.44)$$

Если в уравнении (2.44) перейти к физическому времени τ и в полученном уравнении положить $v'_0 = 0$ и сделать преобразование Фурье по времени, то получим следующее уравнение, которое определяет так называемую «кинетическую» альфвеновскую волну (Kinetic Alfvén wave) [55]:

$$\omega^2 = v_A^2 k_{\parallel}^2 (1 + \rho_s^2 (l^2 + k_{\perp}^2)) . \quad (2.45)$$

Для $S^2 \gg 1$, асимптотическое решение (2.42) для однородного уравнения (2.44) может быть точно проинтегрировано и представлено через эллиптические интегралы. Однако вместо точного выражения для этого интеграла мы запишем

приближенные более простые выражения, применимые к различным интервалам обезразмеренного времени T . Мы находим, что альфвеновские волны в их «классическом» модальном виде (с тепловыми поправками),

$$\phi_{1,2}(\tau) \approx \exp \left[\pm i k_{\parallel} v_A \tau \sqrt{1 + (k_{\perp}^2 + l^2) \rho_s^2} \right], \quad (2.46)$$

будут существовать только в пределах временного интервала $0 < \tau < (v_0')^{-1}$ ($|T| < 1$), т.е., для физических времен меньших, чем обратный сдвиговой коэффициент. В следующем временном интервале

$$1 \ll T \ll (l\rho_s)^{-1}, \quad (2.47)$$

альфвеновские волны начинают испытывать немодальное медленное затухание модального решения

$$\phi_{1,2} \sim \frac{1}{T} \exp(\pm iST). \quad (2.48)$$

Немодальное поведение усиливается на интервале

$$(l\rho_s)^{-1} \ll T \ll (l\rho_s)^{-1} \frac{v_{Te}}{v_A}, \quad (2.49)$$

на котором решение

$$\phi_{1,2} \sim T^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\pm i \frac{S}{2} l \rho_s T^2\right) \quad (2.50)$$

характеризуется «частотой» линейно растущей со временем. Наконец, для асимптотически больших времен (для времен больших различных временных масштабов задачи)

$$T \gg (l\rho_s)^{-1} \frac{v_{Te}}{v_A}, \quad (2.51)$$

решение

$$\phi_{1,2} \sim T^{-2} \exp\left(\pm iST \frac{v_{Te}}{v_A}\right) \quad (2.52)$$

соответствует алгебраически затухающей осциллирующей моде. На этой конечной стадии волна, которая начинала свое существование как кинетическая альфвеновская волна с дисперсией (2.45) и фазовой скоростью близкой к альфвеновской скорости, заканчивает свое распространение как волна с фазовой скоростью, близкой

к тепловой скорости электронов v_{Te} . Это преобразование обусловлено эффектом конечной массы электронов, который обычно опускается в изучении альфвеновских волн в плазме с конечным давлением, $\beta > m_e/m_i$. Вследствие действия сдвига скорости течения, этот обычно отбрасываемый член становится основным для достаточно больших времен, когда эффективное волновое число становится большим. Поскольку волны распространяющиеся с тепловой скоростью электронов будут подвергаться сильному электронному затуханию Ландау, сдвиговое течение может становиться эффективным механизмом затухания альфвеновских или дрейфово-альфвеновских волн в сдвиговом слое в режиме улучшенного удержания плазмы токамака. Благодаря сдвиговому течению волны (которые могут быть растущими) могут быть трансформированы в затухающую часть спектра, что приведет к их окончательному затуханию. Естественно, что при этих условиях становится необходимым кинетическое описание альфвеновских волн.

В пространственно-временных координатах ξ, η, t , решения (2.46) – (2.52) имеют вид

$$\phi_{1,2}(t, \xi, \eta, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk_{\perp} \int dl \int dk_z \Phi_{1,2}(t, k_{\perp}, l, k_z) e^{ik\xi + il\eta + ik_z z} e^{i\Gamma_{\pm}(t, k, l, k_z)}, \quad (2.53)$$

где $\Phi_{1,2}(t, k_{\perp}, l, k_z)$ содержит начальные значения и не экспоненциальную зависимость этих решений. Для волнового пакета, сгруппированного вокруг центрального волнового числа $K_0 = (k_{\perp 0}, l_0, k_{z0})$, компоненты групповой скорости в сопутствующей система координат равны [32]:

$$\begin{aligned} v_{gx} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Gamma_{\pm}}{\partial k_{\perp}} \right)_{k_{\perp 0}, l_0, k_{z0}}, \quad v_{gy} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Gamma_{\pm}}{\partial l} \right)_{k_{\perp 0}, l_0, k_{z0}}, \\ v_{gz} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Gamma_{\pm}}{\partial k_z} \right)_{k_{\perp 0}, l_0, k_{z0}}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Из полученных решений следует, что «классическая» картина распространения пакета альфвеновских волн с групповой скоростью

$$\begin{aligned} v_{gx} &= \mp v_A \frac{k_{0\parallel}}{k_{0\perp}} \frac{k_{0\perp}^2 \rho_s^2}{\sqrt{1 + (k_{0\perp}^2 + l_0^2) \rho_s^2}}, \quad v_{gy} = \mp v_A \frac{k_{0\parallel}}{l_0} \frac{l_0^2 \rho_s^2}{\sqrt{1 + (k_{0\perp}^2 + l_0^2) \rho_s^2}}, \\ v_{gz} &= \mp v_A \sqrt{1 + (k_{0\perp}^2 + l_0^2) \rho_s^2} \end{aligned} \quad (2.55)$$

будет найдена только в интервале времени $0 < \tau < (v'_0)^{-1}$ (или $|T| < 1$). Во временном интервале (2.47), имеем $v_{gz} = v_A$ и $v_{gx} = v_{gy} = 0$, т.е., волновой пакет не распространяется поперек магнитного поля. Для времен (2.49), мы имеем

$$\begin{aligned} v_{gx} &= \pm v_A k_{0\parallel} \rho_s, & v_{gy} &= \mp v_A \frac{k_{0\perp}}{l_0} k_{0\parallel} \rho_s, \\ v_{gz} &= \mp v_A l_0 \rho_s \left(v'_0 t - \frac{k_{0\perp}}{l_0} \right), \end{aligned} \quad (2.56)$$

что показывает, что в этом интервале компонента групповой скорости v_{gx} , направлена вдоль градиента скорости, т.е. в направлении противоположном начальному (2.55). Следовательно после периода блокирования, пакет отражается в направлении x . Для предельно больших времен (2.51) мы имеем $v_{gx} = v_{gy} = 0$ и $v_{gz} = v_{Te}$, т.е. пакет распространяется строго вдоль магнитного поля.

Частное решение неоднородного уравнения (2.44),

$$\phi_* = \frac{\rho^2 (k_{\perp}^2 + l^2) \phi(0) + p_e(0)}{1 + \rho_s^2 (l^2 + (k_{\perp} - v'_0 l \tau)^2)}, \quad (2.57)$$

является того же типа, что и решение, полученное для конвективной ячейки или вихря [36]. Оно также является решением для окончательной стадии эволюции дрейфовой волны [32]. Учитывая начальные условия (2.38) и (2.39), мы запишем полное решение для потенциала ϕ

$$\phi(\tau) = C_1 \phi_1(\tau) + C_2 \phi_2(\tau) + \phi_*(\tau), \quad (2.58)$$

где постоянные $C_{1,2}$ равны

$$\begin{aligned} C_{1,2} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k_{\perp}^2}{l^2}}} \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \rho_s^2 (l^2 + k_{\perp}^2)}} \left[\frac{\phi(0) - p_e(0)}{(1 + \rho_s^2 (l^2 + k_{\perp}^2))^2} \mp i \frac{v_A}{c} A_{\parallel}(0) \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{1}{S} \left(\frac{l k_{\perp}}{l^2 + k_{\perp}^2} \phi(0) - \frac{l k_{\perp} \rho_s^2 (\rho_s^2 (l^2 + k_{\perp}^2) \phi(0) + p_e(0))}{(1 + \rho_s^2 (l^2 + k_{\perp}^2))^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.59)$$

При получении $C_{1,2}$, малые члены порядка $(m_e/m_i) (k_{\perp}^2 + l^2) \rho_s^2/\beta$ были пренебрежены. Таким образом, в однородной плазме спектр возмущения состоит из двух альфвеновских волн, определенных уравнениями (2.46)–(2.52), и конвективной ячейки (2.53). Временная эволюция возмущенного давления электронов p_e

получается из (2.12) и (2.13),

$$p_e(\tau) = -\rho_s^2 \left(l^2 + (k_\perp - v'_0 l \tau)^2 \right) \phi(\tau) + \rho_s^2 (l^2 + k_\perp^2) \phi(0) + p_e(0), \quad (2.60)$$

которое растет как T во временном интервале (2.47), как \sqrt{T} во временном интервале (2.49), и остается постоянным для больших времен. Из (2.57) и (2.60), мы можем также получить, что возмущенное давление электронов, связанное с конвективной ячейкой, $\phi_*(\tau)$, может быть не больше чем $\mathcal{O}(S^{-2})$.

Из (2.12), мы находим, что магнитный потенциал A_{\parallel} связанный с альфвеновскими волнами равен

$$A_{\parallel(1,2)} = -\frac{c}{v_A} \phi_{(1,2)}(T) \sqrt{\frac{1 + l^2 \rho_s^2 (1 + T^2)}{1 + \frac{v_A^2}{v_{Te}^2} l^2 \rho_s^2 (1 + T^2)}} + \mathcal{O}(S), \quad (2.61)$$

который, для выделенных выше интервалов времени становится в (2.47),

$$A_{\parallel(1,2)} \sim -\frac{1}{T} \exp(\pm iST), \quad (2.62)$$

на интервале (2.49)

$$A_{\parallel(1,2)} \sim -\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\pm i \frac{S}{2} l \rho_s T^2\right), \quad (2.63)$$

и на интервале (2.51)

$$A_{\parallel(1,2)} \sim -\frac{1}{T^2} \exp\left(\pm iST \frac{v_{Te}}{v_A}\right). \quad (2.64)$$

Для конвективной ячейки магнитный потенциал равен

$$A_{\parallel*}(T) = 2i \frac{c}{v_A} \frac{\rho_s^2 l^2}{S} T \frac{\rho_s^2 (k_\perp^2 + l^2) \phi(0) + p_e(0)}{[1 + l^2 \rho_s^2 (1 + T^2)]^2}. \quad (2.65)$$

Он растет как T , когда $T < (l\rho_s)^{-1}$, и сильно затухает как T^{-3} при $T > (l\rho_s)^{-1}$. Интересно заметить, что в этом случае конечного давления плазмы, также как и в случае низкого давления плазмы, шир скорости вносит различные временные зависимости для различных возмущений.

Асимптотические решения уравнения (2.44) для предельно сильного шира, $S \ll 1$, сразу получают преобразованием уравнения (2.44) к «медленной» переменной времени $T_1 = ST$. С новой переменной T_1 уравнение (2.44) принимает

вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T_1} \left\{ \left(\frac{S^2}{T_1^2} + \frac{l^2 c^2}{\omega_{pe}^2} \right) \frac{\partial}{\partial T_1} \left[\left(1 + \frac{T_1^2}{S^2} \right) \phi(T_1) \right] \right\} + \left(1 + \rho_s^2 l^2 \left(1 + \frac{T_1^2}{S^2} \right) \right) \phi(T_1) \\ = \rho_s^2 (k_{\perp}^2 + l^2) \phi(0) + p_e(0). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Для T_1 конечного и $S \rightarrow 0$, т.е., для $T > S^{-1}$, получаем из уравнения (2.66) решения (2.52) для альфвеновских волн, и решение (2.57) для конвективной ячейки.

Интересно отметить, что при применении стандартного модального подхода с использованием преобразования Фурье по времени получается дифференциальное уравнение 4-го порядка

$$\begin{aligned} k_z^2 v_A^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2 \right) \left[\frac{1}{\omega - k_y v'_0 x - k_y v_{de}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2 \right) \tilde{\phi} \right] \\ - k_z^2 v_A^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2 \right) \frac{\tilde{\phi}}{\omega - k_y v'_0 x} + (\omega - k_y v'_0 x) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2 \right) \tilde{\phi} = 0, \end{aligned} \quad (2.67)$$

решить которое и получить вышеприведенные результаты для всех временных интервалов оказывается практически невыполнимой задачей.

2.4.2 Неоднородная плазма с холодными ионами.

Получим теперь решения уравнения (2.37) для случая слабого шира ($S \gg 1$) в эйкональном приближении отдельно для случаев слабо ($S \gg C \sim 1$), и сильно ($S \sim C \gg 1$) неоднородной плазмы.

Слабо неоднородная плазма.

После подстановки соотношения (2.42) с разложением (2.43) в уравнение (2.37) три решения для неоднородной плазмы могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \phi_{1,2}(T) = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2} \sqrt[4]{(1 + l^2 \rho_s^2 (1 + T^2)) \left(1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1 + T^2) \right)}} \\ \times \exp \left\{ \pm i S \int_{-\frac{k_{\perp}}{l}}^T dT' \sqrt{\frac{1 + l^2 \rho_s^2 (1 + T'^2)}{1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1 + T'^2)}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{iC}{2} \left(\frac{1}{l\rho_s \sqrt{1+l^2\rho_s^2}} \operatorname{arctg} \frac{l\rho_s T'}{\sqrt{1+l^2\rho_s^2}} \right. \\
& \left. - \frac{1}{\sqrt{l\rho_s \frac{v_A^2}{v_{Te}^2}} \sqrt{1+\frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2}}} \operatorname{arctg} \frac{\frac{cl}{\omega_{pe}} T'}{\sqrt{1+\frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2}}} \right) \Bigg\} \quad (2.68)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\phi_3(T) &= \frac{1+\rho_s^2(l^2+k_\perp^2)}{1+l^2\rho_s^2(1+T^2)} \exp \left\{ -i \frac{C}{l\rho_s \sqrt{1+l^2\rho_s^2}} \right. \\
& \times \left. \left(\operatorname{arctg} \frac{l\rho_s T}{\sqrt{1+l^2\rho_s^2}} + \operatorname{arctg} \frac{k_\perp \rho_s}{\sqrt{1+l^2\rho_s^2}} \right) \right\}, \quad (2.69)
\end{aligned}$$

Решение (2.68) описывает кинетическую альфвеновскую волну в сдвиговом течении плазмы, модифицированную неоднородностью плотности плазмы, а решение (2.69) представляет электронную дрейфовую волну при наличии сдвигового течения (см. решение (1.31) в Главе 1 [32]). Из (2.69) видно, что благодаря сдвиговому течению дрейфовая волна в конце концов трансформируется в конвективную ячейку. Интересно отметить, что в (2.68) и (2.69) члены в экспоненте, связанные с неоднородностью плазмы пропорциональны функции arctg . Поэтому зависимость от неоднородности плотности плазмы становится слабой после некоторого времени, и асимптотически альфвеновские волны в слабо неоднородной плазме будут иметь тот же самый вид как в однородной плазме (2.52) с слегка измененными коэффициентами (определенными начальными условиями (2.38)–(2.39)). Ослабление эффектов неоднородности обусловлено ростом волновых чисел, обусловленным сдвиговым течением, что делает слабо неоднородную плазму как однородную для возмущений со все большими k .

Сильно неоднородная плазма

В этом случае функция $f_0(T)$ в разложении (2.43) находится из уравнения

$$(f_0^2 + 1)(f_0 + i\delta) = - (1 + T^2) l^2 \rho_s^2 f_0 \left(1 + \frac{c^2}{\omega_{pe}^2 \rho_s^2} f_0^2(T) \right), \quad (2.70)$$

где $\delta = C/S$. В пределе $v'_0 = 0$ и $m_e = 0$, уравнение (2.70) приводится к хорошо известному дисперсионному уравнению, связывающему дрейфовые и альфвеновские волны в неоднородной плазме без сдвигового течения. При наличии сдвигового течения, однако, уравнение (2.70) содержит важную зависимость от времени, которая ведет к временным изменениям в структуре возмущений плазмы. Уравнение (2.70) не имеет аналитически простых решений для функции f_0 . Это также верно для гораздо более сложного уравнения для f_1 – следующей функции в разложении (2.43) в эйкональном представлении (2.42) решения.

Для $|T| \ll 1$, решения уравнения (2.70) подобны полученным для плазмы без сдвигового течения. При больших временах T , сдвиговое течение существенно изменяет решения. Запишем уравнение (2.70) в виде,

$$f_0 \left[f_0^2 + i\delta f_0 + 1 + l^2 \rho_s^2 (1 + T^2) + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1 + T^2) f_0^2(T) \right] = -i\delta. \quad (2.71)$$

Тогда для $T \gg 1$ находим первое решение,

$$f_{01} \approx \frac{-i\delta}{1 + l^2 \rho_s^2 (1 + T^2)}, \quad (2.72)$$

которое соответствует дрейфовой волне. Для интервала времени (2.49), из уравнения

$$f_0^2 + i\delta f_0 + l^2 \rho_s^2 T^2 = 0, \quad (2.73)$$

можно получить приближенно два решения,

$$f_{02,03} \approx -\frac{i}{2} \left(\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 4l^2 \rho_s^2 T^2} \right). \quad (2.74)$$

Эти решения являются немодальными альфвеновскими волнами, модифицированными неоднородностью плазмы. Для еще бóльших времен, $T \gg (l\rho_s)^{-1} v_{Te}/v_A$, (2.51), приближенными решениями уравнения (2.70) являются,

$$f_{02,03} \approx -\frac{i\delta\omega_{pe}^2}{2T^2 c^2 l^2} + i\frac{v_{Te}}{v_A} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{2T^2 c^2 l^2} \right), \quad (2.75)$$

Отсюда можно сделать вывод, что для сильно неоднородной плазмы с холодными ионами дрейфовая волна, а также эффекты неоднородности у альфвеновских

волн со временем исчезают. В пределе длительного времени, временная эволюция начального возмущения будет определяться уравнением подобным уравнению (2.44), и поэтому структура дрейфово–альфвеновской волны трансформируется в конвективную ячейку и сильно затухающую (вследствие электронного затухания Ландау) альфвеновскую волну.

2.5 Временная эволюция несобственных альфвеновских волн в полуграниченном сдвиговом течении плазмы.

На основе решения задачи на начальные данные выше показано, что в плазме со сдвиговым течением элементарное синусоидальное возмущение за время порядка $t \sim (dv_0(x)/dx)^{-1}$, где $v_0(x)$ – скорость течения плазмы, становится немодальным с зависящими от времени частотой, волновым вектором и амплитудой. В разделах 2.2 – 2.4 рассмотрена временная эволюция альфвеновских волн в плазме с неограниченным по пространству сдвиговым течением. В данном разделе, основанном на материалах работ [56, 57], проведено исследование временной эволюции несобственных альфвеновских волн, возникающих под воздействием гармонического возмущения, приложенного на границе полубесконечного сдвигового течения. Решение этой задачи необходимо для создания новых методов диагностики плазмы, основанных на исследовании особенностей распространения электромагнитных волн в плазме со сдвиговым течением. Возникновение непрерывного спектра у альфвеновских возмущений плазмы со сдвиговым течением делает общепринятый подход, основанный на использовании спектрального преобразования по времени и применения модальных решений, бесперспективным для решения этой задачи. Применение немодального подхода, развитого в предыдущих разделах, дает возможность решить эту задачу гораздо более простыми методами и получить в явном виде соотношения, определяющие временную эволюцию амплитуды и фазы распространяющихся в плазме несобственных альфвеновских волн, возбуждающихся гармоническим возмущением, приложенным к границе сдвигового течения.

Как и в предыдущем разделе, основными уравнениями данного исследова-

ния являются уравнение продольного движения электронов, уравнение квазинейтральности (для плотности тока), уравнения для возмущений давления электронов \tilde{p}_e и ионов \tilde{p}_i . В дрейфовом приближении эта система уравнений приводится к системе уравнений (2.1) – (2.4) для параллельного компонента возмущения магнитного потенциала \tilde{A}_{\parallel} , электростатического потенциала $\tilde{\phi}$ и для \tilde{p}_e и \tilde{p}_i . В новых координатах линеаризованная система уравнений (2.1) – (2.4) для обезразмеренных переменных $\phi = (e\tilde{\phi}/T_e)$, $A_{\parallel} = (e\tilde{A}_{\parallel}/eT_e)$, $p_e = (\tilde{p}_e/n_{0e}T_e)$, $p_i = (\tilde{p}_i/n_{0i}T_i)$ принимает вид (2.12) – (2.15).

В конвективных переменных (1.8) пространственная зависимость, связанная со сдвиговым течением, отсутствует. Предполагаем, что неоднородное сдвиговое течение занимает область $x \geq 0$, а в области $x < 0$ течения плазмы нет ($v'_0 = 0$). Выполним одностороннее преобразование Фурье по ξ и двустороннее преобразование Фурье по η и ζ ,

$$A_{\parallel}(\tau, k_{\perp}, l, k_z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} d\xi A_{\parallel}(\tau, \xi, \eta, \zeta) \exp(-ik_{\perp}\xi - i\eta - ik_z\zeta), \quad (2.76)$$

и, введя обезразмеренное время $T = v'_0\tau - k/l$, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} v'_0 \frac{\partial}{\partial T} \left[\left(1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1 + T^2) \right) A_{\parallel}(l, k_z, T) \right] + ick_z \phi(l, k_z, T) \\ - i \frac{ck_z}{en_{0e}} p_e(l, k_z, T) = - \frac{c^2 v'_0}{\omega_{pe}^2} \frac{\partial a}{\partial T}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$v'_0 \frac{\partial p_e}{\partial T} - \frac{ik_z c \Gamma_e T_{0e} l^2}{4\pi e} (1 + T^2) A_{\parallel}(l, k_z, T) = ik_z a(l, k_z, T), \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} v'_0 l^2 \frac{\partial}{\partial T} \left[(1 + T^2) \phi(l, k_z, T) \right] + ik_z \frac{v_A^2 l^2}{c} (1 + T^2) A_{\parallel}(l, k_z, T) \\ = \Phi(l, k_z, T) - ik_z \frac{v_A^2}{c} a(l, k_z, T), \end{aligned} \quad (2.79)$$

в которой положено, что $p_i = 0$ и

$$a(l, k_z, T) = A'_x(\tau, x=0, l) - i(k + 2v'_0 l \tau) A(\tau, x=0, l), \quad (2.80)$$

$$\Phi(l, k_z, T) = \phi'_x(\tau, x=0, l) - i(k + 2v'_0 l \tau) \phi(\tau, x=0, l). \quad (2.81)$$

Полученная система уравнений (2.77) – (2.79) является базовой для последующего анализа. В следующих разделах 2.5.1 и 2.5.2 мы рассмотрим эту систему для случаев плазмы низкого ($\beta \ll m_e/m_i$) и умеренного ($m_e/m_i \ll \beta \ll 1$) давления отдельно.

2.5.1 Вынужденные альфвеновские волны в плазме низкого давления ($\beta \ll m_e/m_i$).

В случае плазмы низкого давления, когда $\beta \ll m_e/m_i$, можно пренебречь возмущением давления электронов. Тогда система уравнений (2.77) – (2.79) приводится к следующей системе уравнений:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v_A^2}{v_{Te}^2} \rho_s^2 \Delta_{\perp} A_{\parallel} \right) = c \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (2.82)$$

$$\frac{d}{dt} (\Delta_{\perp} \phi) = -\frac{v_A^2}{c} \frac{\partial}{\partial z} \Delta_{\perp} A_{\parallel}. \quad (2.83)$$

Эта система может быть приведена к следующему неоднородному уравнению для возмущения потенциала ϕ :

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2} \left[(1 + T^2) \phi \right] + \frac{k_{\parallel}^2}{(v'_0)^2} \frac{v_{Te}^2}{l^2 \rho_s^2} \phi = \frac{1}{(v'_0 l)^2} \Upsilon(T, l), \quad (2.84)$$

где функция $\Upsilon(l, \tau)$ определяется возмущением потенциала ϕ на границе сдвигового течения плазмы ($x=0$),

$$\Upsilon(l, \tau) = \phi'_x(\tau, x=0, l) - i(k + 2v'_0 l \tau) \phi(\tau, x=0, l) \quad (2.85)$$

Для решения уравнения (2.84) оказывается удобным ввести новую переменную $G(T, l)$,

$$(1 + T^2) \phi(T, l) = G(T, l), \quad (2.86)$$

для которой уравнение (2.84) принимает вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} + B^2 \frac{G}{1 + T^2} = \frac{1}{(v'_0 l)^2} \Upsilon(T, l), \quad (2.87)$$

где $B^2 = k_{\parallel}^2 v_{Te}^2 / (v_0')^2 l^2 \rho_s^2$.

Получим решение уравнения (2.87) для двух временных интервалов, а именно $T \ll 1$ и $T \gg 1$ для возмущений на границе плазмы $x = 0$ в виде одной Фурье гармонике с частотой $\omega = \omega_0$ и волновым вектором $l = l_0$ поперек сдвигового течения,

$$\phi(\tau, x = 0, l) = \phi_0 \delta(l - l_0) e^{i\omega_0 \tau} \quad \text{и} \quad \phi'_x(\tau, x = 0, l) = E_{0x} \delta(l - l_0) e^{i\omega_0 \tau}. \quad (2.88)$$

Для первого временного интервала, $T \ll 1$, решение для $\phi(\tau, l)$ имеет модальный вид:

$$\begin{aligned} \phi(\tau, l_0) &= C_1 \exp \left[iB \left(v_0' \tau - \frac{k}{l} \right) \right] + C_2 \exp \left[-iB \left(v_0' \tau - \frac{k}{l} \right) \right] \\ &\quad - \frac{e^{i\omega_0 \tau} \delta(l - l_0)}{l^2 (\omega_0^2 - (Bv_0')^2)} \\ &\times \left\{ \omega_0^2 E_{0x} - 4v_0' l \omega_0 \phi_0 + \omega_0^2 \phi_0 \frac{4l\omega_0 v_0' + k (\omega_0^2 + (Bv_0')^2) - 2k\omega_0^2}{\omega_0^2 - (Bv_0')^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.89)$$

Для второго временного интервала, $T \gg 1$, асимптотическое решение для $\phi(\tau, l)$ уже оказывается немодальным:

$$\begin{aligned} \phi(\tau, l_0, k) &\simeq C_1 \left(v_0' \tau - \frac{k}{l} \right)^{-\frac{3}{2} + i\omega_1} + C_2 \left(v_0' \tau - \frac{k}{l} \right)^{-\frac{3}{2} - i\omega_1} \\ &- \frac{4}{(v_0' l)^2} \delta(l - l_0) e^{i\omega_0 \tau} \left(\frac{-\omega_0^2 E_{0x} + 4v_0' l \omega_0 \phi_0 + i\omega_0^2 k \phi_0}{\left(v_0' \tau - \frac{k}{l} \right) (9 + 4\omega_1^2)} - 2il\phi_0 \frac{\omega_0^2}{25 + 4\omega_1^2} \right). \end{aligned} \quad (2.90)$$

В (2.90) $\omega_1 = \sqrt{B^2 - 1/4}$. В уравнениях (2.89) и (2.90) слагаемые, пропорциональные C_1 и C_2 , описывают временную эволюцию начальных возмущений электростатического и магнитного потенциалов и при их отсутствии имеем $C_1 = C_2 = 0$. Последние слагаемые в (2.89) и (2.90) описывают временную эволюцию гармонического возмущения, приложенного к границе сдвигового течения плазмы. Отметим, что сдвиговое течение приводит к немодальной эволюции как начальных возмущений электростатического и магнитного потенциалов, так и вынужденного возмущения, приложенного на границе $x = 0$.

2.5.2 Вынужденные альфвеновские волны в плазме умеренного давления ($1 \ll \beta \ll m_e/m_i$).

Из системы уравнений (2.77), (2.78) и (2.79) получаем неоднородное уравнение третьего порядка, т.е.

$$\left\{ v_0' \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left[\left(1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1 + T^2) \right) \left(\frac{i}{k_z l^2 (1 + T^2)} \left[\frac{c v_0'}{v_A^2} l^2 \frac{\partial}{\partial T} \left[(1 + T^2) \phi \right] - \frac{c}{v_A^2} \Phi + i k_z a \right] \right) \right] + i c k_z \frac{\partial \phi}{\partial T} + \frac{c v_0'}{\omega_{pe}^2} \frac{\partial^2 a}{\partial T^2} \right\} + i l^2 \rho_s^2 \frac{k_z c}{v_0'} \frac{\partial}{\partial T} \left[(1 + T^2) \phi \right] - i \rho_s^2 \frac{k_z c}{v_0'} \Phi = 0. \quad (2.91)$$

Проинтегрировав уравнение (2.91) по T получаем уравнение второго порядка, а именно

$$\begin{aligned} -i \frac{e n_{0e}}{c k_z} \left\{ v_0' \frac{\partial}{\partial T} \left[\left(1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1 + T^2) \right) \left(\frac{i}{k_z l^2 (1 + T^2)} \left[\frac{c v_0'}{v_A^2} \frac{\partial}{\partial T} \left[(1 + T^2) \phi \right] - \frac{c}{v_A^2} \Phi(l, k_z, T) + i k_z a(l, k_z, T) \right] \right) \right] \right. \\ \left. + i c k_z \phi(l, k_z, T) + \frac{c v_0'}{\omega_{pe}^2} \frac{\partial a}{\partial T} \right\} + \frac{c^2 \Gamma_e T_{0e} l^2}{4 \pi e v_A^2} \left[(1 + T^2) \phi \right] \\ - \frac{c^2 \Gamma_e T_{0e}}{4 \pi e v_A^2} \int \Phi(l, k_z, T) dT = 0. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Для переменной $G(T, l)$, определенной соотношением (2.86), уравнение (2.92) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\left(\frac{1}{1 + T^2} + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} \right) \frac{\partial G}{\partial T} \right] + S^2 \left(\frac{1}{1 + T^2} + \rho_s^2 l^2 \right) G = l^2 M(l, k_z, T), \quad (2.93)$$

где

$$\begin{aligned} M(l, k_z, T) = \frac{1}{v_0' l^2} \frac{\partial}{\partial T} \left[\left(\frac{1}{1 + T^2} \frac{1}{l^2} + \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \right) \Phi(x = 0, l, k_z, T) \right] \\ - i \frac{S^2}{c k_z l^4} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{a(x = 0, l, k_z, T)}{1 + T^2} \right) + \frac{S^2 \rho_S^2}{l^2} \int \Phi(x = 0, l, k_z, T) dT \end{aligned} \quad (2.94)$$

и введен безразмерный параметр $S = k_z v_A / v_0'$. В отсутствие границы сдвигового течения $M(l, k_z, T) = 0$ и решение уравнения (2.92) для любых значений времени в случае слабого сдвигового течения ($S \gg 1$) имеет вид [54]

$$G_{1,2}^{(0)}(T) = \frac{(1+T^2)^{1/2}}{(1+l^2\rho_s^2(1+T^2))^{1/4}(1+c^2l^2\omega_{pe}^2(1+T^2))^{1/4}} \times \exp \left\{ \pm iS \int_{-\frac{k}{l}}^T dT' \left[\frac{1+l^2\rho_s^2(1+T'^2)}{1+c^2l^2\omega_{pe}^2(1+T'^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (2.95)$$

Интеграл в показателе экспоненты соотношения (2.95) вычисляется точно в виде линейной комбинации эллиптических интегралов. Однако оказывается более наглядным, как в разделе 2.4, вычислить приближенно этот интеграл для различных временных интервалов. Здесь рассматривается случай $m_e/m_i \ll \beta \ll 1$ при $l^2\rho_s^2 \ll 1$. Для него различаются три временных интервала, в которых решение (2.95) приближенно можно записать в виде

$$G_{1,2}(T) \simeq T \exp(\pm iST), \quad 1 < T < \frac{1}{l\rho_s}, \quad (2.96)$$

$$G_{1,2}(T) \simeq \sqrt{T} \exp\left(\pm i\frac{ST^2}{2}l\rho_s\right), \quad \frac{1}{l\rho_s} < T < \beta\frac{m_i}{m_e}l\rho_s, \quad (2.97)$$

$$G_{1,2}(T) \simeq \exp\left(\pm iST\frac{v_{Te}}{v_A}\right), \quad \beta\frac{m_i}{m_e}l\rho_s < T. \quad (2.98)$$

Возмущение на границе (граничное условие для рассматриваемой задачи) выберем в виде одной Фурье гармоники с волновым вектором $l = l_0$ поперек сдвигового течения и частотой $\omega = \omega_0$,

$$\begin{aligned} \phi(\tau, x=0, l) &= \phi_0 e^{i\omega_0\tau} \delta(l-l_0) & \phi'_x(\tau, x=0, l) &= E_{0x} e^{i\omega_0\tau} \delta(l-l_0) \\ A(\tau, x=0, l) &= A_0 e^{i\omega_0\tau} \delta(l-l_0) & A'_x(\tau, x=0, l) &= B_{0y} e^{i\omega_0\tau} \delta(l-l_0) \end{aligned} \quad (2.99)$$

Решение уравнения (2.93) имеет вид:

$$G(l_0, k_z, T) = C_1^{(0)} G_1^{(0)}(T) + C_2^{(0)} G_2^{(0)}(T) + C_1(T) G_1^{(0)}(T) + C_2(T) G_2^{(0)}(T), \quad (2.100)$$

где функции $C_1(T)$ и $C_2(T)$ равны

$$C_{1,2}(T) = \mp \frac{i}{2S} \int dt \frac{Q(T, l)}{(1+T^2)} \left[1 + \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\beta} l^2 \rho_s^2 (1+T^2) \right] O(T, l) \times \exp \left\{ \mp iS \int^{T'} dT' \left[\frac{1+l^2\rho_s^2(1+T'^2)}{1+\frac{m_e}{m_i}\frac{1}{\beta}l^2\rho_s^2(1+T'^2)} \right]^{1/2} \right\}, \quad (2.101)$$

где

$$O(T, l) = \frac{(1 + T^2)^{1/2}}{(1 + l^2 \rho_s^2 (1 + T^2))^{1/4} \left(1 + \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\beta} l^2 \rho_s^2 (1 + T^2)\right)^{1/4}}, \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} Q(T, l) = & \exp\left(\frac{i\omega_0 k}{v'_0 l}\right) \exp\left(i\frac{\omega_0}{v'_0} T\right) \left\{ \frac{2T}{(1 + T^2)^2} \frac{1}{l^2 v'_0} \left[-i\omega_0 E_{0x} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2iv'_0 l \phi_0 - \omega_0 (3k + 2Tl) \phi_0 \right] \right. \\ & - \frac{1}{(lv'_0)^2} \left(\frac{1}{1 + T^2} + \frac{l^2 \rho_s^2 v_A^2}{v_{Te}^2} \right) \left[-\omega_0^2 E_{0x} + 4v'_0 \omega_0 l \phi_0 + i\omega_0 (3k + 2Tl) \phi_0 \right] \\ & + \frac{S^2}{k_z c l^2} \frac{1}{(1 + T^2)^2} \left[(-\omega_0 B_{0y} + i\omega_0 (3k + 2Tl) A_0 + 2v'_0 l A_0) (1 + T^2) \right. \\ & \left. - (B_{y0} - i(3k + 2Tl) A_0) 2T v'_0 \right] + S^2 \rho_s^2 (E_{x0} - i(3k + 2Tl) \phi_0) \left. \right\}. \quad (2.103) \end{aligned}$$

Решение уравнения (2.93) также оказывается удобным представить поотдельности для трех временных интервалов

$$1 < T < \frac{1}{l\rho_s}, \quad \frac{1}{l\rho_s} < T < \beta \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{l\rho_s}, \quad \beta \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{l\rho_s} < T.$$

В первом временном интервале, $1 < T < 1/l\rho_s$, решения $\phi(k, l, k_z, \tau)$ и $A_{\parallel}(k, l, k_z, \tau)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \phi(k, l, k_z, \tau) \sim & C_1^{(0)} \frac{1}{(v'_0 \tau - \frac{k}{l})} \exp\left(iS \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)\right) \\ & + C_2^{(0)} \frac{1}{(v'_0 \tau - \frac{k}{l})} \exp\left(-iS \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)\right) \\ & - 2il\phi_0 \rho_s^2 e^{i\omega_0 \tau} \delta(l - l_0) + o\left(\left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)^{-1}\right), \quad (2.104) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\parallel} \sim & i \frac{c}{v_A S} \left\{ C_1^{(0)} \exp\left(iS \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)\right) \left[\frac{1}{(v'_0 \tau - \frac{k}{l})^2} + \frac{iS}{v'_0 \tau - \frac{k}{l}} \right] + \right. \\ & \left. + C_2^{(0)} \exp\left(-iS \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)\right) \left[\frac{1}{(v'_0 \tau - \frac{k}{l})^2} - \frac{iS}{v'_0 \tau - \frac{k}{l}} \right] \right\} \\ & + \delta(l - l_0) e^{i\omega_0 \tau} \left\{ 2l\phi_0 \left(\frac{i\omega_0}{v'_0} + \frac{2}{v'_0 \tau - \frac{k}{l}} \right) \frac{c}{v_A S} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +i\frac{c}{v_A v'_0} \frac{1}{S} (i\omega_0 E_{0x} - 2iv'_0 l \phi_0 + \omega_0 (k + 2v'_0 l \tau)) \frac{1}{l^2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)^{-2} \\
& \left. - \frac{1}{l^2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)^{-2} (B_{y0} - i(k + 2v'_0 l \tau)) \right\}. \tag{2.105}
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь второй временной интервал, $1/l\rho_s < T < (\beta m_i) / (l\rho_s m_e)$. Для этого интервала можно получить два различных асимптотических представления для коэффициентов $C_1(T)$ и $C_2(T)$ – одно представление в случае, когда стационарная точка $T^{(0)} = \omega_0 / (k_z v_A l \rho_s)$ не входит в этот временной интервал и второе, когда она входит. В первом случае асимптотики для $\phi(k, l, k_z, \tau)$ и $A_{\parallel}(k, l, k_z, \tau)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
\phi(k, l, k_z, \tau) & \sim C_1^{(0)} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)^{-3/2} \exp\left(i\frac{S}{2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)^2 l\rho_s\right) + \\
& + C_2^{(0)} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)^{-3/2} \exp\left(-i\frac{S}{2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)^2 l\rho_s\right) \\
& - i\frac{\phi_0 l \rho_s^2}{\left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)} \exp\left(\frac{i\omega_0 k}{v'_0 l}\right) \delta(l - l_0) \tag{2.106} \\
& \times \exp\left(iS \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right) \frac{\omega_0}{v'_0}\right) \frac{2S\sqrt{l\rho_s}}{\left(\frac{\omega_0}{v'_0}\right)^2 - \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)^2 S^2 l^2 \rho_s^2} + o\left(\left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)^{-3}\right)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
A_{\parallel}(k, l, k_z, \tau) & \sim i\frac{c}{v_A} \frac{1}{S} \left\{ C_1^{(0)} \exp\left(i\frac{S}{2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)^2 l\rho_s\right) \right. \\
& \times \left[\frac{1}{2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)^{-5/2} + iS l \rho_s \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)^{-1/2} \right] + C_2^{(0)} \exp\left(-i\frac{S}{2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)^2 l\rho_s\right) \\
& \times \left[\frac{1}{2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)^{-5/2} - iS l \rho_s \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)^{-1/2} \right] \tag{2.107} \\
& - i\frac{\phi_0 l \rho_s^2}{v'_0 \tau - \frac{k}{l}} \exp\left(i\frac{\omega_0 k}{v'_0 l}\right) \delta(l - l_0) \exp\left(iST \frac{\omega_0}{v'_0}\right) \frac{2S\sqrt{l\rho_s}}{\left(\frac{\omega_0}{v'_0}\right)^2 - \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)^2 S^2 l^2 \rho_s^2} \\
& \times \left[\frac{1}{v'_0 \tau - \frac{k}{l}} + iS \frac{\omega_0}{v'_0} + \frac{2 \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right) S^2 l^2 \rho_s^2}{\left(\frac{\omega_0}{v'_0}\right)^2 - \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l}\right)^2 S^2 l^2 \rho_s^2} \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$+\delta(l-l_0) e^{i\omega_0\tau} \left[i \frac{c}{v_A v'_0} \frac{1}{S} (i\omega_0 E_{0x} - 2iv'_0 l \phi_0 + \omega_0 (k + 2v'_0 l \tau)) \frac{1}{l^2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^{-2} - \frac{1}{l^2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^{-2} (B_{y0} - i(k + 2v'_0 l \tau)) \right].$$

Во втором случае, когда значение времени $T^{(0)} = \omega_0 / (k_z v_A l \rho_s)$ принадлежит временному интервалу $1/l\rho_s < T < (\beta m_i) / (l\rho_s m_e)$, асимптотики для $\phi(k, l, k_z, \tau)$ и $A_{\parallel}(k, l, k_z, \tau)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \phi(k, l, k_z, \tau) &\sim C_1^{(0)} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^{-3/2} \exp \left(i \frac{S}{2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^2 l \rho_s \right) \\ &+ C_2^{(0)} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^{-3/2} \exp \left(-i \frac{S}{2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^2 l \rho_s \right) \\ &+ \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^{-2} \sqrt{2\pi S} \phi_0 \rho_s^2 \exp \left(\frac{i\omega_0 k}{v'_0 l} \right) \delta(l-l_0) \\ &\times \left\{ -\exp \left(i \frac{S}{2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^2 l \rho_s \right) \exp \left[i \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{S l \rho_s (v'_0)^2} - i \frac{\pi}{4} \right] \right. \\ &\left. + \exp \left(-i \frac{S}{2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^2 l \rho_s \right) \exp \left[i \frac{3}{2} \frac{\omega_0^2}{S l \rho_s (v'_0)^2} - i \frac{\pi}{4} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.108)$$

и

$$\begin{aligned} A_{\parallel}(k, l, k_z, \tau) &\sim i \frac{c}{v_A S} \frac{1}{S} \left\{ C_1^{(0)} \exp \left(i \frac{S}{2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^2 l \rho_s \right) \right. \\ &\times \left(\frac{1}{2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^{-5/2} + i S l \rho_s \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^{-1/2} \right) \\ &+ C_2^{(0)} \exp \left(-i \frac{S}{2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^2 l \rho_s \right) \left(\frac{1}{2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^{-5/2} + i S l \rho_s \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^{-1/2} \right) \\ &\left. - i \sqrt{2\pi S} \phi_0 \rho_s^2 \exp \left(\frac{i\omega_0 k}{v'_0 l} \right) \delta(l-l_0) \frac{S l \rho_s}{v'_0 \tau - \frac{k}{l}} \right. \\ &\times \left\{ \exp \left(i \frac{S}{2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^2 l \rho_s \right) \exp \left[i \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{S l \rho_s (v'_0)^2} - i \frac{\pi}{4} \right] \right. \\ &\left. + \exp \left(-i \frac{S}{2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^2 l \rho_s \right) \exp \left[i \frac{3}{2} \frac{\omega_0^2}{S l \rho_s (v'_0)^2} - i \frac{\pi}{4} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned}
& +\delta(l-l_0) e^{i\omega_0\tau} \left[i \frac{c}{v_A v'_0} \frac{1}{S} (i\omega_0 E_{0x} - 2iv'_0 l \phi_0 + \omega_0 (k + 2v'_0 l \tau)) \frac{1}{l^2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^{-2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{l^2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^{-2} (B_{y0} - i(k + 2v'_0 l \tau)) \right].
\end{aligned}$$

Рассмотрим третий временной интервал $(\beta m_i) / (l \rho_s m_e) < T$. Асимптотики для этого интервала $\phi(k, l, k_z, \tau)$ и $A_{\parallel}(k, l, k_z, \tau)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
\phi(k, l, k_z, \tau) & \sim C_1^{(0)} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^{-2} \exp \left(iS \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right) \frac{v_{Te}}{v_A} \right) \\
& + C_2^{(0)} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^{-2} \exp \left(-iS \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right) \frac{v_{Te}}{v_A} \right) \quad (2.110) \\
& - 2i \rho_s^2 l \phi_0 \sqrt[4]{\left(\frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\beta} \right)^3} \frac{l \rho_s}{(v'_0 \tau - \frac{k}{l})} \frac{v_A}{v_{Te}} e^{i\omega_0 \tau} \delta(l-l_0) + o \left(\left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^{-2} \right)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
A_{\parallel}(k, l, k_z, \tau) & \sim i \frac{c}{v_A} \frac{1}{S} \left\{ C_1^{(0)} iS \frac{v_{Te}}{v_A} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^{-2} \exp \left(iS \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right) \frac{v_{Te}}{v_A} \right) \right. \\
& \quad \left. - C_2^{(0)} iS \frac{v_{Te}}{v_A} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^{-2} \exp \left(-iS \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right) \frac{v_{Te}}{v_A} \right) \right. \quad (2.111) \\
& \quad \left. - 2i \rho_s^2 l \phi_0 \sqrt[4]{\left(\frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\beta} \right)^3} \frac{l \rho_s}{(v'_0 \tau - \frac{k}{l})} \frac{v_A}{v_{Te}} e^{i\omega_0 \tau} \delta(l-l_0) \left[\left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^{-1} + \frac{i\omega_0}{v'_0} \right] \right\} \\
& + \delta(l-l_0) e^{i\omega_0\tau} \left[i \frac{c}{v_A v'_0} \frac{1}{S} (i\omega_0 E_{0x} - 2iv'_0 l \phi_0 + \omega_0 (k + 2v'_0 l \tau)) \frac{1}{l^2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^{-2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{l^2} \left(v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right)^{-2} (B_{y0} - i(k + 2v'_0 l \tau)) \right].
\end{aligned}$$

Полученные решения (2.106) – (2.111) показывают, что влияние плазмы на гармоническое возмущение на различных временных интервалах различно. Однако на всех временных интервалах при $T > 1$ возникает немодальная структура и у вынужденных возмущений.

2.6 Выводы

Представлена аналитическая теория временной эволюции дрейфово–альфвеновских волн в однородном сдвиговом течении неоднородной плазмы слабого и конечного давления. Случаи плазмы с холодными и горячими ионами, слабого и сильного сдвигового течения рассмотрены отдельно. Показано, что обычная модальная структура альфвеновских и дрейфовых волн имеет место только для ограниченного времени на начальной стадии эволюции. Для больших времен эти волны приобретают более сложную немодальную структуру со временной зависимостью частот и амплитуд и с различной временной зависимостью для возмущенных потенциалов A_{\parallel} , ϕ и возмущенного давления электронов p_e .

Получено, что в плазме низкого давления, $\beta \ll m_e/m_i$, с холодными ионами сдвиговое течение приводит к изменению модальной зависимости от времени на зависимость степенного типа у пространственных Фурье-гармоник возмущенных потенциалов на временах $t \geq (v'_0)^{-1}$. Алгебраическое затухание со временем у магнитного потенциала оказывается более быстрым, чем у электростатического потенциала. Эта различная зависимость различных возмущений у линейной системы является немодальным элементом введенным сдвиговым течением.

Для плазмы с умеренным давлением ($m_e/m_i \ll \beta \ll 1$) и холодными ионами, сдвиговая скорость уменьшает влияние неоднородности плотности плазмы на альфвеновские волны, и ведет к асимптотическому поведению вида $1/t^2$ для амплитуд как электростатического, так и магнитного потенциалов. С ростом времени сдвиговое течение приводит к росту частоты альфвеновской волны. В пределе больших времен фазовая скорость (вдоль магнитного поля) альфвеновской волны приближается к тепловой скорости электронов. На этой конечной стадии волна, которая начинала свое существование как кинетическая альфвеновская волна с дисперсией (2.45) и фазовой скоростью близкой к альфвеновской скорости, заканчивает свое распространение как волна с фазовой скоростью близкой к тепловой скорости электронов v_{Te} . Это преобразование обусловлено эффектом конечной массы электронов, который обычно опускается в изучении альфвеновских волн в плазме с конечным давлением, $\beta > m_e/m_i$. Поскольку волны распространяющи-

еся с тепловой скоростью электронов будут подвергаться сильному электронному затуханию Ландау, сдвиговое течение может стать эффективным механизмом затухания альфвеновских или дрейфово–альфвеновских волн в сдвиговом слое в режиме улучшенного удержания плазмы токамака. Рассмотрена динамика пакета немодальных альфвеновских волн. Показано, что классическая картина распространения пакета альфвеновских волн имеет место только на начальной стадии распространения пакета. Для больших времен компонента групповой скорости вдоль градиента сдвиговой скорости обращается в нуль и затем меняет знак – происходит блокирование и отражение пакета. Для предельно больших времен групповая скорость пакета вдоль магнитного поля становится равной тепловой скорости электронов, а компоненты групповой скорости поперек магнитного поля обращаются в нуль. Важно отметить, что полученные в этой главе результаты, описывающие временную эволюцию альфвеновских волн в сдвиговом течении плазмы низкого или умеренного давления, практически недостижимы для анализа на основе общепринятого модального подхода.

Проанализирована динамика вынужденных колебаний в сдвиговом течении плазмы при наличии альфвеновских волн. Получены соотношения, определяющие временную эволюцию векторного и скалярного потенциалов в плазме низкого и умеренного давлений. Показано, что сдвиговое течение плазмы приводит к немодальной структуре не только «собственные» колебания, возникшие в результате эволюции начальных возмущений, но и вынужденные, возникшие в результате гармонического возмущения потенциалов на границе сдвигового течения и распространяющегося в плазме.

Интересно отметить, что анализ плазмы с продольным сдвиговым течением с $\mathbf{v}_0(x) = v'_0 x \mathbf{b}_0$, где v'_0 зависит от x , ведет к уравнениям идентичным с (2.12) – (2.15), если переопределить время T и параметры S and $C_{e,i}$ как

$$T = v'_0 \frac{k_z}{l} \tau - \frac{k_\perp}{l}, \quad S = \frac{k_z v_A}{v'_0 \frac{k_z}{l}}, \quad C_{e,i} = \frac{l v_{de, di}}{v'_0 \frac{k_z}{l}}. \quad (2.112)$$

Поэтому, решение начальной задачи для продольного сдвигового течения можно получить из представленного выше случая поперечного сдвигового течения

простым изменением v'_0 на $v'_0 k_z / l$.

Глава 3

Временная эволюция дрейфово–альфвеновских неустойчивостей в однородном сдвиговом течении плазмы с горячими ионами.

3.1 Гидродинамическая дрейфово–альфвеновская неустойчивость сдвигового течения плазмы.

В неоднородной плазме с горячими ионами, $T_i \leq T_e$, без сдвигового течения возможно развитие гидродинамической дрейфово–альфвеновской неустойчивости [58]. В настоящей Главе рассматривается влияние сдвигового течения на временную эволюцию этой неустойчивости в режиме слабого сдвига течения, которое соответствует стадии перехода в режим улучшенного удержания, (L – H переход), и режиму сильного сдвигового течения, который соответствует стадии развития транспортных барьеров. Для этой цели мы должны рассмотреть полную систему уравнений (2.12)–(2.15). Удобно теперь представить эту систему уравнений в матричном виде и ввести новые переменные U и Ψ , соотношениями

$$U = (1 + T^2) \phi, \quad \Psi = \left(1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1 + T^2) \right) A_{\parallel}. \quad (3.1)$$

Рассмотрим режимы слабого сдвигового течения, для которых $S \gg 1$, $S/C_e = \mathcal{O}(1)$ и $S/C_i = \mathcal{O}(1)$ и сильного сдвигового течения, для которого $S \ll 1$, $S/C_e = \mathcal{O}(1)$ и $S/C_i = \mathcal{O}(1)$, по отдельности. Параметры S и C_e , C_i определены соотношениями (2.22). Введением параметра λ формальной заменой $S \rightarrow \lambda S$, $C_e \rightarrow \lambda C_e$, $C_i \rightarrow \lambda C_i$, уравнения (2.12)–(2.15) могут быть записаны в виде

$$\frac{dq}{dT} + F(T, \lambda) q = 0, \quad (3.2)$$

где $q = (\Psi, p_e, p_i, U)$ – 4-х мерный вектор и матрица $F(T, \lambda)$ равна:

$$F(\lambda, t) = \begin{pmatrix} \frac{i\lambda C_e}{1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1 + T^2)} & -i\lambda S \frac{c}{v_A} & 0 & i\lambda S \frac{c}{v_A} \frac{1}{1 + T^2} \\ -i \frac{c}{v_A} \frac{v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2} S \lambda \frac{l^2 (1 + T^2)}{1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1 + T^2)} & 0 & 0 & i\lambda C_e \frac{1}{1 + T^2} \\ 0 & 0 & 0 & -i\lambda C_i \frac{1}{1 + T^2} \\ i \frac{v_A}{c} \lambda S \frac{1 + T^2}{1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1 + T^2)} & 0 & T & i\lambda C_i \end{pmatrix}.$$

Режимы слабого и сильного сдвигового течения соответствуют большому и малому значениям параметра λ , соответственно.

Решение уравнения (3.2) в случае течения со слабым сдвигом рассматривается в эйкональном приближении в виде

$$q(T, \lambda) = a(T) \exp \left(\lambda \int f(T, \lambda) dT \right), \quad (3.3)$$

где $a(T)$ – вектор–столбец, и $f(T, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(T) \lambda^{-i}$. Для $f_0(T)$ можно получить один корень $f_0(T) = 0$ и другие три корня определенные из уравнения

$$\begin{aligned} & (f_0^2(T) + iC_i f_0(T) + S^2) (f_0(T) + iC_e) \\ & = - \left[f_0^2(T) \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\beta} + S^2 \right] (1 + T^2) l^2 \rho_s^2 (f_0(T) + iC_i), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где было использовано тождество $c^2 l^2 / \omega_{pe}^2 = (m_e / m_i) (1 / \beta) l^2 \rho_s^2$. При $l \rho_s \ll 1$ на временах $T \ll 1$ правая часть уравнения (3.4) мала. Опустив правый член мы имеем для $T \ll 1$ решения

$$f_{01,02} = i \frac{|C_i|}{2} \pm \left(\frac{C_i^2}{4} + S^2 \right)^{1/2}, \quad (3.5)$$

которые определяют две альфвеновские волны и решение

$$f_{03} = -iC_e, \quad (3.6)$$

которое определяет дрейфовую электронную волну. Учет правой части дает гидродинамическую дрейфово-альфвеновскую неустойчивость. Максимальный инкремент будет для волн в окрестности пересечения решений f_{01} и f_{03} и равен (для $T_i = T_e$) [58]

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} l v_{de} l \rho_s \sqrt{\left(\frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\beta} - 2\right) (1 + T^2)}. \quad (3.7)$$

Для времен $T \geq 1$ временная зависимость инкремента становится важной. Поскольку для времени $t \geq (v'_0)^{-1}$ мы имеем

$$\frac{\gamma}{v'_0} \simeq \left(\frac{l v_{de}}{v'_0}\right) l \rho_s \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta}}, \quad (3.8)$$

длинноволновые возмущения с $l \rho_s < (v'_0 / l v_{de}) (m_i \beta / m_e)$ на временах меньше чем обратный модальный инкремент (3.7) растут с немодальным инкрементом, который линейно растет со временем. Поэтому представляется очевидным, что для этих волн обычная оценка для подавления неустойчивости вследствие эффекта нелинейной декорреляции [11], $\gamma \sim v'_0$, с модальным инкрементом γ , должна быть изменена.

На временах $T > T_1 = \frac{1}{l \rho_s} \sqrt{\frac{m_i \beta}{m_e}}$ правая часть уравнения (3.4) становится уже не малой и общепринятая процедура, которая дает дрейфово-альфвеновскую неустойчивость с инкрементом (3.7), уже не справедлива. Для этих времен представляется удобным записать уравнение (3.4) в виде

$$\begin{aligned} & \left[f_0^2(T) + \frac{S^2 l^2 \rho_s^2 (1 + T^2)}{1 + \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\beta} l^2 \rho_s^2 (1 + T^2)} \right] (f_0(T) + i C_i) \\ & = - \frac{S^2 (f_0(T) + i C_e) + i C_e f_0(T) (f_0(T) + i C_i)}{1 + \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\beta} l^2 \rho_s^2 (1 + T^2)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Правая часть в уравнении (3.9) может рассматриваться для больших времен, $T \gg 1$, как малая. Без правой части мы имеем три несвязанных решения, два из которых

$$f_{01,02} = \pm i S l \rho_s \sqrt{\frac{1 + T^2}{1 + \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\beta} l^2 \rho_s^2 (1 + T^2)}} \quad (3.10)$$

можно отнести к трансформированным сдвиговым течением альфвеновским волнам, и третье решение

$$f_{03}(T) = -iC_i, \quad (3.11)$$

представляет электронную дрейфовую волну, трансформированную сдвиговым течением в ионную дрейфовую волну. При $T_i = 0$, решение (3.11) соответствует нуль-частотной конвективной ячейке [32]. При условии пересечения волновых ветвей $f_{01} = f_{03}$, которое в безшировом случае дает инкремент (3.7), мы находим для $f_0 = f_{01} + \delta f_0$, что

$$\delta f_0 = \pm i \frac{1}{\sqrt{2}l\rho_s} \frac{S(C_e + |C_i|)}{\sqrt[4]{(1+T^2) \left(1 + \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\beta} l^2 \rho_s^2 (1+T^2)\right)}}. \quad (3.12)$$

Отсюда видно что на этой стадии эволюции дрейфово-альфвеновская неустойчивость отсутствует. Этот результат показывает, что на временах $T > T_1$ сдвиговое течение приводит к изменению частоты волн и, в результате, к исчезновению связи волн. Однако этот результат является математическим, а не физическим, поскольку для времен $T > T_1$ имеем

$$\gamma(t) t > \frac{lv_{de}}{v'_0} \frac{1}{l\rho_s} \sqrt{\frac{m_e}{m_i\beta} - 2} \gg 1. \quad (3.13)$$

Поэтому до развития этого немодального эффекта нелинейные эффекты, такие, например, как эффект усиленной нелинейной декорреляции [11], стабилизируют эту немодальную неустойчивость.

3.2 Резистивная дрейфово-альфвеновская неустойчивость сдвигового течения плазмы.

Из уравнения (3.7) следует, что гидродинамическая дрейфово-альфвеновская неустойчивость возбуждается в плазме с низким β с $\beta < m_e/2m_i$. В плазме с большим бета возможно возбуждение резистивной дрейфово-альфвеновской неустойчивости [58]. Так неустойчивость является электромагнитным двойником электростатической дрейфово-резистивной неустойчивости, временная эволюция которой в плазме со сдвиговым течением рассмотрена в Главе 1. Эта неустойчивость

описывается системой уравнений (3.2) в которой матрица F теперь имеет вид

$$F(\lambda, t) = \begin{pmatrix} \frac{i\lambda C_e + \lambda R_e \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1 + T^2)}{1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1 + T^2)} & -i\lambda S \frac{c}{v_A} & 0 & i\lambda S \frac{c}{v_A} \frac{1}{1 + T^2} \\ -i \frac{c}{v_A} \frac{v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2} S \lambda \frac{l^2 (1 + T^2)}{1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1 + T^2)} & 0 & 0 & i\lambda C_e \frac{1}{1 + T^2} \\ 0 & 0 & 0 & -i\lambda C_i \frac{1}{1 + T^2} \\ i \frac{v_A}{c} \lambda S \frac{1 + T^2}{1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1 + T^2)} & 0 & T & i\lambda C_i \end{pmatrix}.$$

с новым слагаемым $\nu_{ei} (c^2 l^2 / \omega_{pe}^2) A_{\parallel}$, добавленным в левую часть уравнения (3.2). Это слагаемое отвечает за столкновительную диссипацию продольного движения электронов. С учетом этого слагаемого уравнение для $f_0(T)$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned} & (f_0^2(T) + iC_i f_0(T) + S^2) (f_0(T) + iC_e) \\ & = - \left[f_0^2(T) \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\beta} + f_0(T) R_e \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\beta} + S^2 \right] (1 + T^2) l^2 \rho_s^2 (f_0(T) + iC_i), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где использован безразмерный параметр $R_e = \nu_{ei}/v'_0 \rightarrow \lambda R_e$. Для $l\rho_s \ll 1$ для времен $T \leq 1/l\rho_s$ правая часть уравнения (3.14) является малой. Максимальный инкремент для резистивной дрейфово-альфвеновской неустойчивости будет для осцилляций в окрестности пересечения решений f_{01} и f_{03} определенными уравнениями (3.5) и (3.6). Этот инкремент равен:

$$\gamma \approx \frac{1}{\sqrt{6}} \nu_{ei} l \rho_s \frac{m_e}{m_i \beta} \sqrt{\frac{1 + T^2}{2 - \frac{m_e}{m_i \beta}}} \quad (3.15)$$

в случае слабых столкновений ($\nu_{ei} \ll l v_{de}$) и

$$\gamma \approx \frac{1}{\sqrt{3}} l \left(\rho_s \nu_{ei} l v_{de} \frac{m_e}{m_i \beta} \right)^{1/2} (1 + T^2)^{1/2} \quad (3.16)$$

в случае сильных столкновений ($\nu_{ei} \gg l v_{de}$).

Как в случае гидродинамической дрейфово–альфвеновской неустойчивости, для времен $T \geq 1$ немодальная зависимость инкрементов (3.15) и (3.16) от времени становится важной в эволюции волн. Волны с $l\rho_s < (v'_0/\nu_{ei})(m_i\beta/m_e)$ в случае слабых столкновений и волны с $l\rho_s < (v'_0/\sqrt{\nu_{ei}l\nu_{de}})(m_i\beta/m_e)$ в случае сильных столкновений растут со временем с линейно растущим со временем инкрементами (3.15) и (3.16). Очевидно, что для этих волн оценка для подавления неустойчивости благодаря нелинейному эффекту декорреляции [11], $\gamma \sim v'_0$, с модальным инкрементом γ также должна измениться с учетом немодальных эффектов.

Для времен $T \geq 1/l\rho_s$ правая часть уравнения (3.14) не является малой и вышеприведенная процедура не является более приемлемой. Для этих времен более целесообразно представление уравнения (3.14) в виде

$$\left[f_0^2(T) + \frac{l^2\rho_s^2(1+T^2)\left(S^2 + f_0(T)R_e\frac{m_e}{m_i\beta}\right)}{1 + \frac{m_e}{m_i}\frac{1}{\beta}l^2\rho_s^2(1+T^2)} \right] (f_0(T) + iC_i) = -\frac{S^2(f_0(T) + iC_e) + iC_e f_0(T)(f_0(T) + iC_i)}{1 + \frac{m_e}{m_i}\frac{1}{\beta}l^2\rho_s^2(1+T^2)}. \quad (3.17)$$

Пренебрегая слагаемым в правой части уравнения (3.17) для больших времен, $T \gg 1$, как малым, мы имеем три независимых решения, два из которых,

$$f_{01,02}(T) = -\frac{R_e}{2} \pm \sqrt{\frac{R_e^2}{4} - S^2\frac{m_i\beta}{m_e}} \quad (3.18)$$

соответствуют линейно затухающим решениям и третье решение, $f_{03}(T)$, определяется уравнением (3.11). Очевидно, что на этих временах резистивная дрейфово–альфвеновская неустойчивость отсутствует. Однако времена $T \geq 1/l\rho_s$ являются намного более длинными, чем время порядка обратного инкремента. Для этого времени мы имеем

$$\gamma(t)t > \frac{\nu_{ei}}{v'_0}\frac{1}{l\rho_s}\frac{m_e}{m_i\beta}\frac{1}{\sqrt{2 - \frac{m_e}{m_i\beta}}} \gg 1 \quad (3.19)$$

в слабо столкновительном случае и

$$\gamma(t)t > \frac{\sqrt{\nu_{ei}l\nu_{de}}}{v'_0l\rho_s}\sqrt{\frac{m_e}{m_i\beta}} \gg 1 \quad (3.20)$$

в сильно столкновительном случае.

Отсюда следует, что исследованные немодальные эффекты не приводят к подавлению дрейфово–альфвеновских неустойчивостей. Ответственным за подавление обоих дрейфово–альфвеновских неустойчивостей в период L – H перехода может быть более сильный в этом случае эффект усиленной нелинейной декорреляции.

3.3 Эволюция дрейфово–альфвеновских волн в плазме с горячими ионами в режиме сильного шира скорости.

Для решения системы (3.2) в режиме сильного сдвигового течения, которое соответствует стадии развитых транспортных барьеров [12], введём новое безразмерное время $T_1 = \lambda T$. С новым временем система уравнений (3.2) с учетом столкновительной диссипации приобретет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial T_1} + i C_e \frac{\Psi(T_1)}{1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} \left(1 + \frac{T_1^2}{\lambda^2}\right)} + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} R_e \frac{\left(1 + \frac{T_1^2}{\lambda^2}\right) \Psi(T_1)}{1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} \left(1 + \frac{T_1^2}{\lambda^2}\right)} \\ + i \frac{c}{v_A} S \frac{U(T_1)}{1 + \frac{T_1^2}{\lambda^2}} - i \frac{c}{v_A} S p_e = 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial T_1} + i C_e \frac{U(T_1)}{1 + \frac{T_1^2}{\lambda^2}} - i \frac{v_{Te}^2}{c v_A} \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} S \frac{\left(1 + \frac{T_1^2}{\lambda^2}\right) \Psi(T_1)}{1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} \left(1 + \frac{T_1^2}{\lambda^2}\right)} = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial T_1} - i C_i \frac{U(T_1)}{1 + \frac{T_1^2}{\lambda^2}} = 0, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial U}{\partial T_1} + i C_i U(T_1) + i \frac{v_A}{c} S \frac{\left(1 + \frac{T_1^2}{\lambda^2}\right) \Psi(T_1)}{1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} \left(1 + \frac{T_1^2}{\lambda^2}\right)} + \frac{T_1}{\lambda} p_i = 0. \quad (3.24)$$

Для временного интервала $\lambda \omega_{pe}/cl \gg T_1 \gg \lambda$ с точностью до членов порядка $\mathcal{O}(\lambda^2)$ решение системы (3.21)–(3.24) имеет вид

$$A_{\parallel}(\tau) \approx \exp\left(-\frac{c^2 l^2 \nu_{ei}}{\omega_{pe}^2 3v_0'} \left(v_0' \tau - \frac{k}{l}\right)^3\right), \quad (3.25)$$

$$p_e(\tau) \approx -i \frac{v_{Te}^2 k_{\parallel} v_A}{c v_A \nu_{ei}} \exp\left(-\frac{c^2 l^2 \nu_{ei}}{\omega_{pe}^2 3v_0'} \left(v_0' \tau - \frac{k}{l}\right)^3\right), \quad (3.26)$$

$$p_i(\tau) \approx \text{const}, \quad (3.27)$$

$$\phi(\tau) \approx i \frac{v_A k_{\parallel} v_A}{c \nu_{ei}} \exp\left(-\frac{c^2 l^2 \nu_{ei}}{\omega_{pe}^2 3v_0'} \left(v_0' \tau - \frac{k}{l}\right)^3\right). \quad (3.28)$$

Из этих немодальных решений следует, что любые возмущения во временном интервале $\lambda \omega_{pe}/cl \gg T_1 \gg \lambda$ устойчивы относительно резистивной дрейфово-альфвеновской неустойчивости при наличии течения с сильным широм. Эта неустойчивость отсутствует также на временах $T_1 \gg \lambda \omega_{pe}/lc$, где решения системы (3.21)–(3.24) (с опущенными членами порядка $\mathcal{O}(\lambda^2)$) имеют вид

$$A_{\parallel} \sim \frac{\exp\left(-\frac{\nu_{ei}\tau}{2}\right)}{\left(v_0' \tau - \frac{k}{l}\right)^2} (D_1 \cos \delta\tau + D_2 \sin \delta\tau), \quad (3.29)$$

$$p_e \sim \exp\left(-\frac{\nu_{ei}\tau}{2}\right) (F_1 \cos \delta\tau + F_2 \sin \delta\tau), \quad (3.30)$$

$$p_i \sim \text{const}, \quad (3.31)$$

$$\phi \sim \frac{1}{\left(v_0' \tau - \frac{k}{l}\right)^2} (G_1 \cos lv_{di} \tau + G_2 \sin lv_{di} \tau). \quad (3.32)$$

Эти решения показывают, что на окончательной стадии возмущения давлений $p_{i,e}$ и потенциалов ϕ , A_{\parallel} устойчивы и имеют различные зависимости от времени.

Исходная система уравнений для бесстолкновительной плазмы при наличии течения с сильным широм определяется уравнениями (3.21)–(3.24) с $R_e = 0$. Для периода времени $\lambda \ll T_1 \ll \lambda \omega_{pe}/cl$ получаем следующие решения в этом случае для возмущений потенциалов и давлений:

$$(A_{\parallel}(\tau), p_e(\tau)) \sim \frac{1}{\sqrt{v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l}}} \exp\left(\pm i \frac{l \rho_s}{2} k_{\parallel} v_A \left(v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l}\right)^2\right), \quad (3.33)$$

$$p_i \approx \text{const}, \quad (3.34)$$

$$\phi(\tau) \sim \frac{1}{\sqrt{\left(v_0'\tau - \frac{k_\perp}{l}\right)^3}} \exp\left(\pm i \frac{l\rho_s}{2} k_\parallel v_A \left(v_0'\tau - \frac{k_\perp}{l}\right)^2\right). \quad (3.35)$$

где члены порядка $\mathcal{O}(\lambda^2)$ опущены. Наконец, для времен $T_1 > \lambda\omega_{pe}/lc$ мы находим, что на окончательной стадии эволюция возмущений потенциалов и возмущения давления электронов подобна их эволюции в случае $p_i = 0$,

$$A_\parallel \sim \frac{1}{\tau^2} \sin k_\parallel v_{Te}\tau, \quad (3.36)$$

$$p_e \sim \sin k_\parallel v_{Te}\tau, \quad (3.37)$$

$$p_i \approx \text{const}, \quad (3.38)$$

$$\phi \sim \frac{1}{\tau^2} (D \sin lv_{de}\tau + E \sin k_\parallel v_{Te}\tau). \quad (3.39)$$

Стабилизированные возмущения магнитного потенциала и электронного давления на конечной стадии преобразуются, как в случае холодных ионов, в волны, фазовая скорость которых близка к тепловой скорости электронов v_{Te} (а не альфвеновской скорости v_A). Эти волны затухают вследствие электронного затухания Ландау и только возмущения электростатического потенциала с частотой lv_{di} выживут. Однако и они затухнут со временем как τ^{-2} .

3.4 Выводы.

В плазме с горячими ионами могут развиваться гидродинамическая дрейфово-альфвеновская и резистивная дрейфово-альфвеновская неустойчивости. Для режимов слабого сдвигового течения, которые соответствуют периоду $L-H$ перехода [12], [38], немодальные эффекты определяют временную эволюцию неустойчивостей уже на временных масштабах меньших, чем их обратный инкремент. Однако долговременная эволюция этих неустойчивостей, а также их насыщение определяются нелинейными эффектами, такими как нелинейный эффект усиленной декорреляции. В противоположность этому, в течении с сильным широм скорости,

которое может возникнуть в режиме развитых транспортных барьеров [12], линейные немодальные эффекты приводят к подавлению начальных возмущений за времена меньшие, чем обратные инкременты гидродинамической дрейфово-альфвеновской и резистивной дрейфово-альфвеновской неустойчивостей, предотвращая тем самым их развитие. Для плазмы с горячими ионами ($T_i \leq T_e$), частота электронной дрейфовой волны на конечном этапе эволюции приобретает частоту ионной дрейфовой волны, ω_{di} .

Глава 4

Неустойчивость Рэлея–Тейлора в сдвиговом течении плазмы

4.1 Введение.

Хорошо известно [1], что в плазме, помещенной в искривленное магнитное поле с «неблагоприятной» кривизной с градиентом плотности плазмы направленном против направления радиуса кривизны, возникает желобковая неустойчивость Рэлея–Тейлора. Примерами мод Рэлея–Тейлора являются также идеальные и резистивные баллонные неустойчивости [52]. Многочисленные исследования были посвящены приложениям этой теории к турбулентности ионосферы [59]. Неустойчивость Рэлея–Тейлора возникает (и описывается математически подобными уравнениями) в стратифицированной жидкости у которой градиент плотности направлен противоположно направлению силы тяжести [60]. Во всех этих физических ситуациях неустойчивость Рэлея–Тейлора похожа по своему проявлению: она возникает в неоднородной жидкости или плазме и проявляется в перестановке областей высокой и низкой плотностью или температурой. Поэтому часто эту неустойчивость называют перестановочной.

В ионосфере, атмосфере, или на краю плазмы в токамаках могут возникать сдвиговые течения. Еще в работах Майлса [61] и Ко [62] было показано, что сдвиговое течение может подавить развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора. Эффект подавления неустойчивости Рэлея–Тейлора в плазме ионосферы сдвиговым течением был исследован Гуздаром и др. в работе [63], в которой было показано, что неустойчивость подавляется, когда шир скорости $v'_0 > 2^{-1/2}\gamma$, где γ – инкремент неустойчивости Рэлея–Тейлора. В линейной теории неустойчивости Рэлея–

Тейлора плазмы или жидкости со сдвиговым течением применялись как правило два подхода, оба из которых использовали преобразования по времени Фурье или Лапласа. Первый метод – метод нормальных мод или модальный подход. В этом методе возмущение электростатического потенциала возмущений $\phi(\mathbf{r}, t)$ предполагалось гармоничным по времени в виде $\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(x) \exp(-i\omega t +iky)$. Для структуры моды $\phi(x)$ возникает дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее сингулярности в точках, где фазовая скорость возмущений совпадает со скоростью сдвигового течения. Вследствие этого уравнения для $\phi(x)$ собственные функции неортогональны и испытывают сильную интерференцию. Поэтому этот подход оказывается неприменимым для анализа насыщения неустойчивости Рэля–Тейлора сдвиговым течением. Второй метод основан на решении начальной задачи на основе применения прямого и обратного преобразования Лапласа. Важнейшим результатом этого подхода является то, что наряду с дискретными собственными модами был обнаружен непрерывный спектр собственных значений. Отсюда был сделан вывод, что метод нормальных мод, в котором вклад непрерывного спектра опущен, не является правильным для исследования неустойчивости Рэля–Тейлора при наличии сдвигового течения. Однако решение начальной задачи на основе применения прямого и обратного преобразования Лапласа позволяет получить аналитически только результаты для асимптотически больших значений времени. При этом все переходные процессы остаются вне анализа. В работе Чакрабарти и Шпатчека [64] временная эволюция неустойчивости Рэля–Тейлора была исследована на основе подхода Байли [65], без использования спектральных разложений по времени и с использованием зависящих от времени волновых чисел. Эта временная зависимость волновых чисел отражала факт деформации волн сдвиговым течением. В работе [64] был получен критерий $v'_0 > 2^{-1/2}\gamma$ для шира скорости v'_0 , при котором происходит подавление сдвиговым течением неустойчивости Рэля–Тейлора. Этот критерий совпадает с критерием полученным Гуздаром и др. в работе [63]. Однако в [64] было показано, что в условиях подавления неустойчивости эволюция начальных возмущений становится немодальной и гармоничных экспоненциально растущих решений в состоянии близком к подавлению

неустойчивости уже нет, в отличии от предположений работы [63].

В данной Главе, в основу которой положены работы [66, 67, 33], представлена линейная и слабо нелинейная теории электростатической неустойчивости Рэля–Тейлора плазмы со сдвиговым течением, помещенной в искривленное магнитное поле. Неустойчивость возникает в случае неблагоприятной кривизны магнитного поля, когда градиент поля направлен противоположно направлению градиента плотности плазмы. Анализ основывается на немодальном подходе изложенном в Главе 1. Основные уравнения сформулированы в разделе 4.1. В разделе 4.2 изложен анализ эволюции во времени линейных и слабо нелинейных возмущений электростатического потенциала и плотности электронов в плазме с однородным сдвиговым течением. Показано, что ранее полученное в [63], [64] условие для стабилизации неустойчивости Рэля–Тейлора является недостаточным, поскольку оно определяет условие стабилизации только для возмущения электростатического потенциала, однако допускает алгебраический рост во времени для возмущения плотности электронов. Временная эволюция нелинейно возбужденных возмущений электростатического потенциала и плотности электронов, рассмотренная в этой Главе, показывает, что величина шира скорости, достаточная для стабилизации нелинейно возбужденных возмущений электростатического потенциала, оказывается большей, чем полученная в линейном анализе. В то же время нелинейно возбужденные возмущения плотности электронов остаются неустойчивыми. Получено, однако, что при достаточно больших временах даже при учете нелинейных слагаемых неустойчивость Рэля–Тейлора может быть, в конечном счете, стабилизирована без каких–либо диссипативных механизмов.

4.2 Основные уравнения.

Основными уравнениями рассматриваемой проблемы являются уравнение квазинейтральности плотности тока и уравнение непрерывности для электронов. В дрейфовом приближении система уравнений для желобковых, $k_z = 0$, электростатических, $A_{\parallel} = 0$, возмущений в случае холодных ионов, $T_i \rightarrow 0$, но для конечной электронной температуры, T_e , получается из системы уравнений (2.7) – (2.10), в

которой учтена кривизна магнитных силовых линий, и приводится к следующей системе уравнений для возмущения электростатического потенциала ϕ и возмущения плотности электронов n [63, 64, 67]:

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\perp}^2 \phi = -\frac{v_A^2}{c^2} 4\pi e v_{Re} \frac{\partial n}{\partial y}, \quad (4.1)$$

$$\frac{dn}{dt} + v_{Re} \frac{\partial n}{\partial y} + \frac{en_{0e}}{T_e} (v_{de} - v_{Re}) \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \quad (4.2)$$

В уравнениях (4.1), (4.2) $v_{de} = -(cT_e/en_{e0}B_0) dn_{e0}/dx$ – электронная диамагнитная скорость, v_A – Альфвеновская скорость, $v_{Re} = -cT_e/eB_0R$ – электронная дрейфовая скорость в искривленном магнитном поле, $n_{e0}(x)$ – неоднородная равновесная плотность электронов, $R = |B_0^{-1}dB_0(x)/dx|$ – радиус кривизны магнитных силовых линий. Оператор d/dt в (4.1), (4.2) определяется для сдвигового течения поперечного магнитному полю $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{b}_0$ направленного вдоль оси z , как

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_0(x) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{c}{B_0^2} [\mathbf{B}_0 \times \nabla \phi] \cdot \nabla.$$

В этой работе мы рассматриваем случай течения с однородным широм, для которого $\mathbf{v}_0(x) = (c/B_0^2) \mathbf{E}_0(x) \times \mathbf{B}_0 = v'_0 x \mathbf{e}_y$ и v'_0 не зависит от x . В рамках модального подхода, для которого возмущения n , ϕ предполагаются гармоничным по времени в виде $\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(x) \exp(-i\omega t +iky)$, линеаризованная система уравнений приводится к следующему уравнению для структуры моды $\phi(x)$,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \left[1 + \frac{v_A^2}{c^2 \rho_s^2} \frac{v_{Re} (v_{de} - v_{Re})}{(\omega - v'_0 x k_y) (\omega - k_y (xv'_0 + v_{Re}))} \right] k_y^2 \phi = 0, \quad (4.3)$$

которое имеет сингулярности в точках, где фазовая скорость возмущений совпадает со скоростью сдвигового течения. Решения этого уравнения, которые определяют эволюцию только отдельных модальных составляющих, также сингулярны и процедура их получения достаточно сложна. К тому же эти решения, как показывают работы [16, 19], не дают полного описания эволюции начальных возмущений вследствие пренебрежения вкладом от непрерывного спектра. В данной главе начальная задача для неустойчивости Рэля–Тейлора будет решена как в линейном

приближении, так и в ранее не исследованном слабонелинейном приближении, на основе немодального подхода.

Преобразование к координатам ξ и η , определённым соотношениями (1.8), $\tau = t$, $\xi = x$, $\eta = y - v'_0 x \tau$, исключает из уравнений (4.1), (4.2) пространственную зависимость связанную со сдвиговым течением. Преобразованием Фурье уравнений (4.1) и (4.2) по ξ и η в локальном приближении, $kL_n \gg 1$, где L_n – масштаб длины неоднородной равновесной плотности электронов, n_0 и k – волновое число соответственно с пространственной координатой ξ , мы получаем следующую нелинейную систему уравнений

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} + ilv_{Re}n + i\frac{en_0}{T_e}l(v_{de} - v_{Re})\phi(k, l, \tau) = R(k, l, \tau), \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\left(l^2 + (k - v'_0 l \tau)^2 \right) \phi(k, l, \tau) \right] - i4\pi elv_{Re} \frac{v_A^2}{c^2} n = Q(k, l, \tau), \quad (4.5)$$

где

$$R(k, l, \tau) = \frac{c}{B} \int dk_1 dl_1 \int dk_2 dl_2 \phi(k_1, l_1, \tau) n(k_2, l_2, \tau) (l_2 k_1 - l_1 k_2) \times \delta(k - k_1 - k_2) \delta(l - l_1 - l_2) \quad (4.6)$$

и

$$Q(k, l, \tau) = \frac{c}{B} \int dk_1 dl_1 \int dk_2 dl_2 \phi(k_1, l_1, \tau) \phi(k_2, l_2, \tau) (l_2 k_1 - l_1 k_2) \times \left(l_2^2 + (k_2 - v'_0 \tau l_2)^2 \right) \delta(k - k_1 - k_2) \delta(l - l_1 - l_2). \quad (4.7)$$

Систему уравнений можно преобразовать в нелинейное уравнение, имеющее вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[\rho_s^2 \left(l^2 + (k - v'_0 l \tau)^2 \right) \phi \right] + ilv_{Re} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\rho_s^2 \left(l^2 + (k - v'_0 l \tau)^2 \right) \phi \right] - l^2 v_{Re} (v_{de} - v_{Re}) \phi = N(k, l, \tau). \quad (4.8)$$

В (4.8) l – волновое число связанное с координатой η и ρ_s – ионно-звуковой ларморовский радиус. Нелинейный член $N(k, l, \tau)$ имеет вид:

$$N(k, l, \tau) = \rho_s^2 \left(\frac{\partial}{\partial \tau} Q(k, l, \tau) + ilv_{Re} Q(k, l, \tau) \right) + i \frac{lv_{Re}}{en_0} R(k, l, \tau). \quad (4.9)$$

Без сдвигового течения, т.е. для $v'_0 = 0$, мы можем найти из уравнения (4.7) в линейном приближении следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 - \omega lv_{Re} + \frac{l^2 v_{Re} (v_{de} - v_{Re})}{\rho_s^2 (k^2 + l^2)} = 0, \quad (4.10)$$

из которого получаем инкремент γ неустойчивости Рэлея–Тейлора, равный [2]

$$\gamma = \frac{lv_{Re}}{\rho_s^2 \sqrt{k^2 + l^2}} \left(\frac{v_{de}}{v_{Re}} - 1 - \frac{1}{4} \rho_s^2 (k^2 + l^2) \right)^{1/2}. \quad (4.11)$$

Наша цель показать как экспоненциальный рост неустойчивых колебаний будет изменяться или даже подавляться немодальными эффектами, источником которых является шир сдвиговой скорости v'_0 , который привел к возникновению временной зависимости у коэффициентов уравнения (4.8).

Далее представляется удобным использовать обезразмеренное время T , определенное как $T = v'_0 \tau - k/l$ и безразмерные параметры $S = lv_{Re}/v'_0$, $S_1 = |lv_{de}/v'_0|$ и $C = |v_{Re}/v_{de}| < 1$. Определим новую функцию

$$G(k, l, T) = (1 + T^2) \exp(iST/2) \phi(T).$$

Из уравнения (4.8) следует, что функция $G(k, l, T)$ удовлетворяет обыкновенному неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial T^2} G(T) + S_1^2 C \left[C \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{l^2 \rho_s^2 (1 + T^2)} \right) - \frac{1}{l^2 \rho_s^2 (1 + T^2)} \right] G(k, l, T) \\ = M(k, l, T; G|G). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Нелинейный член, $M(k, l, T; G|G)$, в уравнении (4.12) равен

$$\begin{aligned} M(k, l, T; G|G) = \frac{c}{v'_0 B} \int dk_1 dl_1 \int dk_2 dl_2 \frac{l_2^2}{l^2} \frac{(kl_2 - k_2 l)}{(1 + (T + \alpha_1)^2)} \\ \times \delta(k - k_1 - k_2) \delta(l - l_1 - l_2) \left[\left(\frac{iS_{(1)}}{2} - 2 \frac{(T + \alpha_1)}{(1 + (T + \alpha_1)^2)} \right) \right. \\ \left. \times G(k_1, l_1, T + \alpha_1) G(k_2, l_2, T + \alpha_2) + G(k_2, l_2, T + \alpha_2) \right. \\ \left. \times \frac{\partial G(k_1, l_1, T + \alpha_1)}{\partial T} + 2G(k_1, l_1, T + \alpha_1) \frac{\partial G(k_2, l_2, T + \alpha_2)}{\partial T} \right], \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $S_{(1)} = l_1 v_{Re}/v'_0$ и $\alpha_1 = (kl_1 - k_1 l)/ll_1$, $\alpha_2 = (kl_2 - k_2 l)/ll_2$. Нелинейный член $M(k, l, T; G|G)$ (а также член $N(k, l, \tau)$ в уравнении (4.8)) равен нулю для $k = k_1 = k_2 = 0$ мод. Это частный случай был рассмотрен А.Хассамом [68], как линейно наиболее неустойчивый. Проведенный ниже анализ показывает, что этот одномерный случай является нелинейно более устойчивым, и именно двумерный

случай представляет более важную роль в нелинейной временной зависимости возмущений.

Преобразуем уравнение (4.12) в нелинейное интегральное уравнение, имеющее вид:

$$G(k, l, T) = C_1(k, l) G_1(k, l, T) + C_2(k, l) G_2(k, l, T) + \int_{-\frac{k}{l}}^T dT_1 \frac{M(k, l, T_1, G|G)}{W(k, l)} (G_1(k, l, T_1) G_2(k, l, T) - G_2(k, l, T_1) G_1(k, l, T)). \quad (4.14)$$

В уравнении (4.14) $G_1(k, l, T)$, $G_2(k, l, T)$ являются решениями линейного однородного уравнения (4.12) (с $M(k, l, T; G|G) = 0$) и $C_1(k, l)$, $C_2(k, l)$ определяются из начальных данных для потенциала и плотности возмущений, $W(k, l)$ – Вронскиан, который для уравнения (4.12) не зависит от времени. Решение уравнения (4.14) получим в виде разложения по степеням величин $C_1(k, l)$, $C_2(k, l)$ в виде:

$$G(k, l, T) = G_{(1)}(k, l, T) + G_{(2)}(k, l, T) + G_{(3)}(k, l, T) + \dots \quad (4.15)$$

где $G_{(1)}$ (или $\phi_{(1)}$) является решением задачи Коши для линейного уравнения (4.12),

$$G_{(1)}(k, l, T) = C_1(k, l) G_1(k, l, T) + C_2(k, l) G_2(k, l, T), \quad (4.16)$$

а $G_{(2)}$, $G_{(3)}$, \dots (или $\phi_{(2)}$, $\phi_{(3)}$, \dots) появляются благодаря нелинейности.

4.3 Линейная немодальная эволюция неустойчивости Рэлея–Тейлора.

Для времен T в интервале $1 \ll T \ll (l\rho_s)^{-1}$, уравнение (4.12) для $G_{(1)}$ может быть аппроксимировано в виде

$$\frac{\partial^2 G_{(1)}}{\partial T^2} - \frac{S_1^2 C}{l^2 \rho_s^2 T^2} G_{(1)} = 0. \quad (4.17)$$

Решение для $\phi_{(1)}(T)$ в этом интервале, имеет вид:

$$\phi_{(1)}(T) \approx e^{-\frac{i}{2} S T} T^{-2} \left(C_1(k, l) T^{\nu_1} + C_2(k, l) T^{\nu_2} \right), \quad (4.18)$$

где

$$\nu_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_0}{v'_0}\right)^2} \quad (4.19)$$

и

$$\gamma_0 = \frac{\sqrt{v_{Re} v_{de}}}{\rho_s}. \quad (4.20)$$

Из решения (4.18) следует, что линейное возмущение электростатического потенциала, $\phi_{(1)}$, будет подавляться, когда [63, 64]

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_0 \leq |v'_0|. \quad (4.21)$$

Поскольку решение (4.18) определено на интервале $1 \ll T \ll (l\rho_s)^{-1}$, где $\tau \geq \tau_0 = (v'_0)^{-1}$, условие (4.21) эквивалентно условию $\gamma_0 \tau_0 < 1$. Это условие определяет подавление линейного потенциала $\phi_{(1)}(T)$ как немодальный процесс, который происходит до любого модального нелинейного процесса.

Временная эволюция линейной плотности возмущений $n_{(1)}$ определяется из линеаризованного уравнения (4.5), т.е. для $Q(k, l, T) = 0$, и имеет вид

$$\begin{aligned} n_{(1)}(T) &= -i \frac{en_{e0}}{T_e} \rho_s^2 l^2 \frac{v'_0}{lv_{Re}} \frac{\partial}{\partial T} \left[e^{-i\frac{ST}{2}} \left(C_1 T^{\nu_1} + C_2 T^{\nu_2} \right) \right] \\ &\simeq -i \frac{en_{e0}}{T_e} \rho_s^2 l^2 \nu_1 \frac{v'_0}{lv_{Re}} e^{-i\frac{ST}{2}} C_1 T^{\nu_1-1} + \mathcal{O}(ST), \end{aligned} \quad (4.22)$$

где мы полагали, что параметр S много меньше чем ν_1/T на интервале $1 \ll T \ll (l\rho_s)^{-1}$. Из уравнения (4.22) следует, что поскольку $\nu_1 > 1$, сдвиговое течение ведет к подавлению возмущения электростатического потенциала не предотвращая при этом алгебраический рост возмущений плотности электронов n на интервале времени $1 \ll T \ll (l\rho_s)^{-1}$. Этот результат показывает, что понятие подавления неустойчивости плазмы сдвиговым течением не имеет такого строгого определения, как это имеет место в случае плазмы без сдвигового течения, поскольку в этом случае возмущения электростатического и магнитного потенциалов и возмущений давления, температуры и давления (см. также [54]) могут иметь различные временные зависимости и устойчивость этих величин должна анализироваться отдельно.

Для времен $T > (l\rho_s)^{-1}$ уравнение (4.12) для $G_{(1)}$ можно аппроксимировать, как

$$\frac{\partial^2 G_{(1)}}{\partial T^2} + \frac{S_1^2 C^2}{4} G_{(1)} = 0 \quad (4.23)$$

с решением для $\phi_{(1)}(\tau)$ как

$$\phi_{(1)}(\tau) \approx \frac{1}{\tau^2} \left(D_1(k, l) e^{ilv_{Re}\tau} + D_2(k, l) \right) \quad (4.24)$$

Таким образом, на окончательной стадии эволюции линейное возбуждение потенциала осциллирует с частотой lv_{Re} и с амплитудой, затухающей со временем как τ^{-2} . Линейное возмущение плотности электронов эволюционирует как $e^{ilv_{Re}\tau}$ с амплитудой, которая уже остаётся постоянной для этих времен.

4.4 Нелинейная немодальная эволюция неустойчивости Рэля–Тейлора.

Теперь мы рассмотрим влияние нелинейности, определенной слагаемым $N(k, l, \tau)$ в уравнении (4.8), на временную эволюцию неустойчивости Рэля–Тейлора. Из уравнения (4.14) следует, что функция $G_{(2)}(k, l, T)$, которая возникает благодаря нелинейности, определяется уравнением

$$G_{(2)}(k, l, T) = \int_{-\frac{k}{i}}^T dT_1 \frac{M(k, l, T_1; G_{(1)}|G_{(1)})}{W(k, l)} \times \left(G_1(k, l, T_1) G_2(k, l, T) - G_2(k, l, T_1) G_1(k, l, T) \right). \quad (4.25)$$

Сначала рассмотрим интервал времени $(l\rho_s)^{-1} \gg T \gg 1$, где при условии (4.21) возмущенный потенциал $\phi_{(1)}$ подавляется. На этом интервале $G_{1,2}(k, l, T)$ определяются уравнением (4.17) с решениями для $\phi_{(1)}(k, l, T)$, определенными уравнением (4.18). На этом интервале параметр $S_{(1)}$ много меньше, чем ν_1/T . Учитывая для нелинейного слагаемого $M(k, l, T; G_{(1)}|G_{(1)})$ более медленное затухающее решение T^{ν_1} , мы имеем временную зависимость, оценивая $M(k, l, T; G_{(1)}|G_{(1)}) \sim T^{2\nu_1-3}$ и оценивая временную зависимость $G_{(2)}(T)$ как

$$G_{(2)}(T) \sim \int dT_1 T_1^{2\nu_1-3} (T^{\nu_1} T_1^{\nu_2} - T_1^{\nu_1} T^{\nu_2}) \sim T^{\nu_1-\nu_2}. \quad (4.26)$$

Возвращаясь к переменной ϕ мы имеем решение

$$\phi_{(2)}(k, l, T) \sim \exp\left(-i\frac{ST}{2}\right) T^{2\nu_1-3}, \quad (4.27)$$

которое будет алгебраически затухать при условии

$$|v'_0| > \frac{2}{\sqrt{3}}\gamma_0. \quad (4.28)$$

В противном случае мы имеем алгебраический рост. Видно, что условие (4.28) является более сильным, чем условие (4.21) для линейной стабилизации роста потенциала, т.е. линейная стабилизация возмущений потенциала может расти нелинейно, когда условие (4.28) не соблюдается.

Из нелинейного уравнения (4.5) и решения (4.27) следует, что нелинейно возбужденное возмущение $n_{(2)}$ электронной плотности будет иметь решение

$$n_{(2)}(k, l, T) \sim \exp\left(-i\frac{ST}{2}\right) T^{2\nu_1-1}. \quad (4.29)$$

Поскольку $2\nu_1 - 1 > 0$, нелинейная возмущенная плотность $n_{(2)}$ также будет расти на временном интервале $1 \ll T \ll (l\rho_s)^{-1}$.

Из решения (4.25) для $G_{(2)}$ и решения (4.24) следует, что для времен $T \gg (l\rho_s)^{-1}$ нелинейные возмущения потенциала $\phi_{(2)}$ эволюционирует со временем как

$$\phi_{(2)}(\tau) \sim \frac{1}{\tau^2} e^{ilv_{Re}\tau} \quad (4.30)$$

и нелинейные возмущения плотности электронов как

$$n_{(2)}(\tau) \sim e^{ilv_{Re}\tau}. \quad (4.31)$$

Поэтому степенной рост нелинейного потенциала и возмущения плотности являются временными. Важность этого роста, а также важность следующих членов в разложениях возмущения зависит от значений начальных данных. Различия в эволюции во времени возмущения потенциала $\phi_{(2)}$ и возмущения плотности $n_{(2)}$ также очевидны.

Решение $G_{(3)}(k, l, T)$ определяется из уравнения (4.14), как

$$\begin{aligned} G_{(3)}(k, l, T) = & \int_{-\frac{k}{i}}^T dT_1 \left(M(k, l, T_1; G_{(2)}|G_{(1)}) + M(k, l, T_1; G_{(2)}|G_{(1)}) \right) \\ & \times \frac{1}{W(k, l)} \left(G_1(k, l, T_1) G_2(k, l, T) - G_2(k, l, T_1) G_1(k, l, T) \right). \end{aligned} \quad (4.32)$$

На интервале времени $1 \ll T_1 \ll (l\rho_s)^{-1}$ временная зависимость $G_{(3)}$ оценивается из уравнения (4.32) как

$$G_{(3)}(k, l, T) \sim T^{3\nu_1-2}. \quad (4.33)$$

Для переменной $\phi_{(3)}$ мы имеем решение

$$\phi_{(3)}(k, l, T) \sim \exp\left(-i\frac{ST}{2}\right) T^{3\nu_1-4}, \quad (4.34)$$

которое будет алгебраически затухать, при условии

$$|v'_0| > \frac{6}{4}\gamma_0. \quad (4.35)$$

Это условие является более сильным, чем условие (4.28) для стабилизации нелинейного возмущенного потенциала $\phi_{(2)}$. Возмущенная плотность,

$$n_{(3)}(k, l, T) \sim \exp\left(-i\frac{ST}{2}\right) T^{3\nu_1-2}. \quad (4.36)$$

также растет более быстро, чем $n_{(2)}$.

Решение $G_{(4)}(k, l, T)$ определяется из уравнения (4.14) как

$$G_{(4)}(k, l, T) = \int_{-\frac{k}{l}}^T \frac{dT_1}{W(k, l)} (M(k, l, T_1; G_{(3)}|G_{(1)}) + M(k, l, T_1; G_{(1)}|G_{(3)}) + 2M(k, l, T_1; G_{(2)}|G_{(2)})) (G_1(k, l, T_1) G_2(k, l, T) - G_2(k, l, T_1) G_1(k, l, T)) \quad (4.37)$$

На интервале времени $1 \ll T_1 \ll (l\rho_s)^{-1}$ оценка временной зависимости $G_{(4)}(k, l, T)$ имеет вид

$$G_{(4)}(k, l, T) \sim T^{4\nu_1-3}, \quad (4.38)$$

а нелинейное возмущение потенциала $\phi_{(4)}$ изменяется во времени как

$$\phi_{(4)}(k, l, T) \sim \exp\left(-i\frac{ST}{2}\right) T^{4\nu_1-5}. \quad (4.39)$$

Это нелинейное возмущение потенциала будет алгебраически затухать для

$$|v'_0| > \frac{4}{\sqrt{5}}\gamma_0, \quad (4.40)$$

однако в этом случае возмущенная плотность $n_{(4)}$ все еще будет расти как

$$n_{(4)}(k, l, T) \sim \exp\left(-i\frac{ST}{2}\right) T^{4\nu_1-3}. \quad (4.41)$$

Из уравнения (4.14) следует, которое для времен $T > (l\rho_s)^{-1}$ временная зависимость у $\phi_{(3)}(k, l, T)$, $\phi_{(4)}(k, l, T)$ и у $n_{(3)}(k, l, T)$, $n_{(4)}(k, l, T)$ будет той же самой, что и у определённой выше для $\phi_{(2)}(k, l, T)$ и $n_{(2)}(k, l, T)$ уравнениями (4.30) и (4.31) соответственно.

4.5 Законы сохранения

Перейдем в системе уравнений (4.1) – (4.2) к безразмерным возмущениям потенциала $\tilde{\phi} = e\phi/T_e$ и плотности $\tilde{n} = n/n_{0e}$. В этих переменных система уравнений (4.1) – (4.2) будет иметь вид:

$$\frac{d\tilde{n}}{dt} + v_{Re} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial y} + (v_{de} - v_{Re}) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} = 0, \quad (4.42)$$

$$\rho_s^2 \frac{d}{dt} \Delta_{\perp} \tilde{\phi} + v_{Re} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial y} = 0. \quad (4.43)$$

Умножим уравнение (4.42) на $\tilde{\phi}$ и уравнение (4.43) на \tilde{n} и разность полученных уравнений проинтегрируем по всему пространству. В результате получим следующий закон сохранения энергии:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \left[\frac{1}{\rho_s^2} \tilde{n}^2 + (\nabla \tilde{\phi})^2 \right] dV = - \frac{v_{de}}{\rho_s^2} \int \tilde{n} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} dV \quad (4.44)$$

На интервале времени $(l\rho_s)^{-1} \gg T \gg 1$, на котором происходит немодальное подавление неустойчивости Рэлея–Тейлора при выполнении условия (4.21), при $S \ll 1$ решения для ϕ и n можно записать в виде:

$$\phi(T) \approx (C_1 T^{\nu_1 - 2} + C_2 T^{\nu_2 - 2}) \quad (4.45)$$

$$n(T) \approx -ia (\nu_1 C_1 T^{\nu_1 - 1} + \nu_2 C_2 T^{\nu_2 - 1}), \quad (4.46)$$

где $\nu_{1,2}$ определены соотношением (4.19), а

$$a = \frac{cv'_0 l}{B_0 \omega_{ci} v_{Re}}.$$

Выполнив обратное преобразование Фурье по l и предположив, что спектр по l ограничен в пределах $l_1 \leq l \leq l_2$, получим следующие выражения для возмущений

потенциала ϕ и плотности n :

$$n(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z dk_{\perp} e^{ik_z z + ik_{\perp} x} \frac{cv'_0 l}{B_0 \omega_{ci} v_{Re}} \frac{i}{v'_0 t x - y} \exp[il(y - v'_0 t x)] \quad (4.47)$$

$$\times \left[\nu_1 C_1 \left(v'_0 t - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{\nu_1 - 1} + \nu_2 C_2 \left(v'_0 t - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{\nu_2 - 1} \right] \Big|_{l_1}^{l_2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{(v'_0 t x - y)^2} \right),$$

$$\phi(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z dk_{\perp} e^{ik_z z + ik_{\perp} x} \frac{i}{v'_0 t x - y} \exp[il(y - v'_0 t x)] \quad (4.48)$$

$$\times \left[C_1 \left(v'_0 t - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{\nu_1 - 2} + C_2 \left(v'_0 t - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{\nu_2 - 2} \right] \Big|_{l_1}^{l_2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{(v'_0 t x - y)^2} \right).$$

Из (4.47)–(4.48) следует, что

$$(\nabla \phi(x, y, z, t))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z dk_{\perp} \frac{1}{(v'_0 t x - y)^2} \quad (4.49)$$

$$\times \left[C_1 \left(v'_0 t - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{\nu_1 - 2} + C_2 \left(v'_0 t - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{\nu_2 - 2} \right]^2$$

$$+ \left\{ k_z^2 + \left(\frac{v'_0 t + 1}{v'_0 t x - y} \right)^2 + l^2 \left(1 + \left(v'_0 t - \frac{k_{\perp}}{l} \right) \right)^2 \right\} \Big|_{l_1}^{l_2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{(v'_0 t x - y)^4} \right),$$

$$n^2(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z dk_{\perp} \left(\frac{cv'_0 l}{B_0 \omega_{ci} v_{Re}} \right)^2 \frac{1}{(v'_0 t x - y)^2} \quad (4.50)$$

$$\times \left[\nu_1 C_1 \left(v'_0 t - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{\nu_1 - 1} + \nu_2 C_2 \left(v'_0 t - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{\nu_2 - 1} \right]^2 \Big|_{l_1}^{l_2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{(v'_0 t x - y)^4} \right).$$

Из уравнений (4.49)–(4.50) можно получить следующие оценки изменения во времени $(\nabla \tilde{\phi})^2$ и $(\tilde{n})^2$:

$$(\nabla \tilde{\phi})^2 \sim t^{2\nu_1 - 4}, \quad (4.51)$$

$$(\tilde{n})^2 \sim t^{2\nu_1 - 4}, \quad (4.52)$$

$$\tilde{n} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \sim t^{2\nu_1-5}. \quad (4.53)$$

Из закона сохранения энергии для системы уравнений Рэля–Тейлора (4.44) и оценок (4.51)–(4.53) следует, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \left[\frac{1}{\rho_s^2} \tilde{n}^2 + (\nabla \tilde{\phi})^2 \right] dV \sim t^{2\nu_1-5} \sim -\frac{v_{de}}{\rho_s^2} \int \tilde{n} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} dV. \quad (4.54)$$

Таким образом, несмотря на различное поведение во времени возмущений электростатического потенциала и плотности электронов, изменение во времени плотности энергий заключенных в электростатическом потенциале и в возмущении плотности оказывается одинаковым.

4.6 Временная эволюция вынужденных возмущений в полуограниченном сдвиговом течении плазмы, при наличии неустойчивости Рэля–Тейлора.

Положим, что неоднородное сдвиговое течение занимает область $x \geq 0$, а в области $x < 0$ имеем $v'_0 = 0$. Выполнив в конвективной системе отсчета одностороннее преобразование Фурье по ξ и двустороннее по η , получаем из (4.1) – (4.2) следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\left((k - v'_0 l \tau)^2 + l^2 \right) \phi(\tau, k, l) \right] - i \frac{v_A^2}{c^2} 4\pi e l v_{Re} n_e(\tau, k, l) = \Phi(\tau, l) \quad (4.55)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \tau} n_e(\tau, k, l) + i \frac{e n_{0e}}{T_e} l (v_{de0} - v_{Re}) \phi(\tau, k, l) + i l v_{Re} n_e(\tau, k, l) = 0, \quad (4.56)$$

где

$$\Phi(\tau, l) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\phi}(\tau, x=0, l) \right) - i(k + 2v'_0 l \tau) \tilde{\phi}(\tau, x=0, l) \right].$$

В системе уравнений (4.55), (4.56) удобно ввести безразмерное время $T = v'_0 \tau - k/l$. Эта система уравнений может быть преобразована в следующее неоднородное уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2} \left[(1 + T^2) \phi \right] + iS \frac{\partial}{\partial t} \left[(1 + T^2) \phi \right] + \frac{S^2}{l^2 \rho_s^2} \left(1 - \frac{v_{de}}{v_{Re}} \right) \phi = C(T, l), \quad (4.57)$$

где

$$C(T, l) = \frac{1}{l^2 v_0'} \frac{\partial \Phi}{\partial T} - i \frac{v_{Re}}{l (v_0')^2} \Phi \quad \text{и} \quad S = \frac{l v_{Re}}{v_0'} - \text{безразмерный параметр.}$$

Введём новую функцию $G(T) = (1 + T^2) \exp\left(\frac{iST}{2}\right) \phi(T)$. Тогда уравнение (4.57) принимает вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} + S^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(1 - \frac{v_{de}}{v_{Re}}\right)}{l^2 \rho_s^2 (1 + T^2)} \right] G = C(T, l) \exp\left(i \frac{ST}{2}\right). \quad (4.58)$$

Решение уравнения при $C(T, l) = 0$, т.е. $G_{\text{одн}}$, получено в разделе 4.2. Без сдвигового течения, т.е. в случае, когда $v_0' = 0$, мы можем найти из уравнения (4.58) дисперсионное уравнение для неустойчивости Рэля–Тейлора (4.10) с инкрементом γ , определенным (4.11).

Полагая условие (4.21) выполненным, покажем, что стабилизация неустойчивости Рэля–Тейлора сдвиговым течением не нарушится и при наличии гармонического возмущения, приложенного на границе сдвигового течения.

Рис. 4.1: Изменение потенциала $\phi(T)$ во времени со сдвигом ($lv_{de}/v_0' = 1$, $l\rho_s = 0.3$, $k/l = 1$ при наличии гармонического возмущения на границе с частотой $\omega_0 = v_0' = 1$).

Решением неоднородного уравнения (4.56) является

$$G(T) = G_0 + G_*, \quad (4.59)$$

где

$$G_0(T) = A_1 T^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_0}{v_0'}\right)^2}} + A_2 T^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_0}{v_0'}\right)^2}}, \quad (4.60)$$

$$G_*(T) = D_1(T) T^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_0}{v_0'}\right)^2}} + D_2(T) T^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_0}{v_0'}\right)^2}}. \quad (4.61)$$

Предполагаем, что на границе $x = 0$ области $x \geq 0$ возмущение потенциала ϕ_0 имеет вид $\phi_0 = e^{i\omega_0 \tau - i l y}$. Тогда $\phi(T)$ равно (при $T \gg 1$)

$$\begin{aligned} \phi(T) &= \frac{\exp\left(-i \frac{ST}{2}\right)}{1 + T^2} G(T) \\ &\approx \exp\left(-i \frac{ST}{2}\right) T^{-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_0}{v_0'}\right)^2}} (A_1 + D_1(T)), \end{aligned} \quad (4.62)$$

где функция $D_1(T)$, определяющая влияние гармонического возмущения на границе на отдельную Фурье-гармонику потенциала, равна

$$\begin{aligned}
D_1(T) = & -\frac{1}{v'_0} \frac{ie^{-ily}}{lv'_0 \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_o}{v'_0}\right)^2}} \left\{ iv'_0 (2\omega_0 - lv_{Re}) \exp\left(i\frac{\omega_0}{v'_0}\right) \right. \\
& \times \left[-i \left(\frac{S}{2} + \frac{\omega_0}{v'_0}\right) \right]^{-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_o}{v'_0}\right)^2}} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_o}{v'_0}\right)^2}, -i \left(\frac{S}{2} + \frac{\omega_0}{v'_0}\right) T\right) \\
& - (\omega_0 - lv_{Re}) \omega_o \exp\left(i\frac{\omega_0 k}{v'_0 l}\right) \left[-i \left(\frac{S}{2} + \frac{\omega_0}{v'_0}\right) \right]^{-\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_o}{v'_0}\right)^2}} \\
& \times \left[2\frac{k}{l} \left[-i \left(\frac{S}{2} + \frac{\omega_0}{v'_0}\right) \right] \Gamma\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_o}{v'_0}\right)^2}, -i \left(\frac{S}{2} + \frac{\omega_0}{v'_0}\right) T\right) \right. \\
& \left. \left. + \Gamma\left(\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_o}{v'_0}\right)^2}, -i \left(\frac{S}{2} + \frac{\omega_0}{v'_0}\right) T\right) \right] \right\}, \tag{4.63}
\end{aligned}$$

где $\Gamma(\alpha, \beta)$ – неполная Гамма функция. Поскольку величина $D_1(T)$ ограничена как функция времени, устойчивость возмущения потенциала будет, как и в случае без внешнего гармонического возмущения, определяться условием (4.21).

Асимптотика $\phi_*(T)$ для больших значений времени T имеет вид:

$$\begin{aligned}
\phi_*(T) \approx D_1(T) T^{-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_0}{v'_0}\right)^2}} \approx & \frac{i \exp(i(\omega_0 \tau - ly)) \exp(i\frac{ST}{2})}{lv'_0 \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_0}{v'_0}\right)^2}} \left. \vphantom{\frac{i \exp(i(\omega_0 \tau - ly)) \exp(i\frac{ST}{2})}{lv'_0 \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_0}{v'_0}\right)^2}}} \right\} iv'_0 (2\omega_0 - lv_{Re}) \\
& \times \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_0}{v'_0}\right)^2} \left[\frac{i}{T \left(\omega_0 + \frac{Sv'_0}{2}\right)} + \frac{v'_0}{\left(\omega_0 + \frac{Sv'_0}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_0}{v'_0}\right)^2}\right)} \right] (4.64) \\
& + \omega_0 (\omega_0 - lv_{Re}) \frac{i}{\omega_0 + \frac{Sv'_0}{2}} \left(1 + \frac{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_0}{v'_0}\right)^2}}{T \left(\omega_0 + \frac{Sv'_0}{2}\right)} \right. \\
& \left. + \frac{v'_0}{T^2 \left(\omega_0 + \frac{Sv'_0}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_0}{v'_0}\right)^2}\right)} \right) \\
& \left. + 2\frac{k}{l} \frac{1}{T} + \frac{iv'_0}{T^2 \left(\omega_0 + \frac{Sv'_0}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma_0}{v'_0}\right)^2}\right)} \right\}
\end{aligned}$$

Рис. 4.2: Изменение потенциала ϕ во времени в течении со слабым сдвигом ($S = 1$, $l\rho_s = 0,3$, $k/l = 1$, $\omega_0 = v'_0 = 1$)

Проведенный анализ показывает, что гармоническое возмущение потенциала, приложенное к границе сдвигового течения плазмы, приводит к сильному изменению несобственных дрейфовых волн и несобственных возмущений, связанных с неустойчивостью Релея–Тейлора. Амплитуда отдельной пространственной

Фурье–гармоники убывает во времени в случае дрейфовых колебаний плазмы и в условиях неустойчивости Релея–Тейлора. Это убывание связано с тем, что сдвиговое течение непрерывно изменяет «частоту» и «волновой вектор» возмущений потенциала, поскольку в лабораторной системе отсчета величина волнового вектора k оказывается зависящей от времени и равна $-lT$.

4.7 Выводы.

В этой главе мы рассмотрели временную эволюцию неустойчивости Рэлея–Тейлора в плазме со сдвиговым течением. Показано, что при условии (4.21) сдвиговое течение ведет к линейному затуханию электростатического потенциала. Это условие, однако, недостаточно для подавления нелинейно возбужденных возмущений потенциала. Получено, что в интервале шира скорости $1/\sqrt{2}\gamma_0 < v'_0 < 2/\sqrt{3}\gamma_0$ возмущение потенциала $\phi_{(2)}$ растет алгебраически. При $v'_0 > (2/\sqrt{3})\gamma_0$ будут расти нелинейные возмущения $\phi_{(3)}$. Подавление потенциала $\phi_{(3)}$ требует ещё более строгого условия для параметра сдвигового течения v'_0 , которое определяется условием (4.35). Условие (4.35) допускает рост потенциала $\phi_{(4)}$; этот рост будет подавляться, когда выполняется условие (4.40). Очевидно, что подавление нелинейных возмущений потенциала $\phi_{(i)}$ более высоких порядков, $i \geq 5$, потребует ещё больших значений шира скорости. Этот рост нелинейно возбужденных возмущений, а также линейно возбужденных возмущений, является немодальным эффектом, который проявляется на временах $t \geq (v'_0)^{-1}$. Этот эффект будет значительным для эволюции неустойчивости, когда это время сравнимо с обратным инкрементом, т.е. для $v'_0 \sim \gamma_0$. Поэтому даже при условиях (4.21), (4.28), (4.35), (4.40) подавление возмущения электростатического потенциала сдвиговым течением может быть реальным физическим процессом в случае, когда членами порядка $\mathcal{O}(C_{1,2}^5(k, l))$ и более высоких порядков можно пренебречь. Возмущение плотности электронов, n , не будет однако, подавляться сдвиговым течением на интервале $1 \ll T \ll (l\rho_s)^{-1}$, а на временах $T > (l\rho_s)^{-1}$ потенциал осциллирует с частотой lv_{Re} с амплитудой, затухающей во времени как τ^{-2} . Линейные возмущения плотности электронов эволюционируют как $e^{ilv_{Re}\tau}$ с амплитудой, которая

остаётся постоянной для этих времен.

Полученные немодальные решения проявляются при временах $T \geq 1$ или для размерного времени при $t \geq (v'_0)^{-1}$. Полученное выше условие для стабилизации неустойчивости Рэлея–Тейлора и условие $t \geq (v'_0)^{-1}$ дает $\gamma_0 t \sim 1$. Это означает, что для сдвигового течения с $\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_0 \leq |v'_0|$ немодальное решение алгебраического вида возникает на временах порядка обратного инкремента. Для этого роста любой нелинейный процесс с модальным решением не может развиваться. В случае более слабого шира скорости немодальные решения также могут развиваться, но на временах, которые являются намного более длинными, чем обратный инкремент. В этом случае до развития таких немодальных решений, развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора будет определяться нелинейными модальными процессами. Поэтому условие (4.21), а также другие определенные выше ограничения на v'_0 подобны условиям бифуркации решений, которые ведут к принципиально различным немодальной линейной или нелинейной эволюции неустойчивости Рэлея–Тейлора.

При условии $v'_0 \sim \gamma_0$ неустойчивость Рэлея–Тейлора может стабилизироваться также благодаря усиленному сдвиговым течением нелинейному эффекту декорреляции. Проведенные выше исследования показывают, что в случае неустойчивости Рэлея–Тейлора теория эффекта усиленной сдвиговым течением декорреляции должна учитывать немодальное развития потенциала и возмущения плотности и должна быть построена на основе решений несинусоидального типа (4.18), (4.24), (4.27), (4.34) и (4.39) для электростатического потенциала и решения (4.22), (4.29), (4.31), (4.36) и (4.41) для возмущений плотности электронов.

Заключение.

Многочисленные экспериментальные результаты подтверждают важность эффектов, связанных со сдвиговым течением, для подавления турбулентности на краю плазмы, понижения аномального переноса и улучшения удержания плазмы в токамаках и стеллараторах. Эти экспериментальные результаты стимулировали значительное развитие теоретических исследований взаимодействия низкочастотных волн, неустойчивостей и турбулентности плазмы с ее сдвиговым течением. В настоящей диссертации проведено исследование устойчивости однородного сдвигового течения неоднородной плазмы относительно развития в нем низкочастотных колебаний дрейфового типа, ответственных за аномальный перенос плазмы. Это исследование выполнено на основе немодалного подхода без применения спектральных преобразований по времени. Благодаря этому удалось впервые получить результаты о временной эволюции волн и неустойчивостей для произвольных значений времени. Исследованы

- временная эволюция дрейфовых волн в бесстолкновительном течении плазмы (раздел 1.3),
- временная эволюция дрейфово–резистивной неустойчивости в слабостолкновительном сдвиговом течении плазмы (раздел 1.4),
- временная эволюция альфвеновских волн в однородном сдвиговом течении однородной и неоднородной плазмы низкого и умеренного давления с холодными ионами (Глава 2),
- временная эволюция гидродинамической и резистивной дрейфово–альфвеновских неустойчивостей в сдвиговом течении неоднородной плазмы с горячими ионами (Глава 3),
- линейная и нелинейная временная эволюция неустойчивости Рэлея–Тейлора

(Глава 4).

В результате проведенных исследований получены следующие результаты:

1. Впервые получено точное решение (1.31) начальной задачи для уравнения Хасегава–Мима для всех значений времени. Для малых значений времени решение описывает модалную дрейфовую волну. С ростом времени решение становится немодальным с изменяющимися во времени частотой и амплитудой. При достаточно больших значениях времени частота волны в конвективной системе отсчета обращается в нуль – дрейфовая волна трансформируется в конвективную ячейку.

2. Исследована динамика волновых пакетов немодальных дрейфовых волн. Обнаружено, что пакеты дрейфовых волн в сдвиговом течении испытывают только конечные смещения как вдоль так и поперек течения, что указывает на блокировку и нераспространение пакетов дрейфовых волн по направлению градиента скорости сдвигового течения.

3. Получено решение (1.64) начальной задачи для линеаризованной системы уравнений Хасегава–Вакатани для случая слабо столкновительного сдвигового течения плазмы. Показано, что при малых временах и малом значении ширового параметра v'_0 в таком течении возможно развитие дрейфово–резистивной неустойчивости. При выполнении условия (1.72) эта неустойчивость подавляется вследствие развития немодальных эффектов.

4. Получено решение начальной задачи для линеаризованной системы уравнений Хасегава–Вакатани для случая сильно столкновительного сдвигового течения плазмы. Показано, что решение является немодальным уже при достаточно малых временах. Дрейфово–резистивная неустойчивость в этом случае отсутствует.

5. В полубесконечном сдвиговом течении плазмы происходит немодальная временная эволюция не только возмущений, возникших в некоторый начальный момент в объёме сдвигового течения, но и возмущений непрерывно возникающих вследствие синусоидальных возмущений границы и распространяющихся в сдвиговом течении плазмы. Амплитуда этих вынужденных возмущений также спадает

со временем, однако это убывание более медленное, как t^{-1} , чем убывание амплитуды, как t^{-2} , у начальных возмущений.

6. В сдвиговом течении плазмы низкого давления электростатический и магнитный потенциалы альфвеновской волны изменяются во времени по степенным законам (2.26) и (2.27), причем алгебраическое затухание магнитного потенциала оказывается более быстрым чем электростатического. Однако несмотря на различные законы изменения потенциалов во времени скорости изменения плотности электростатической и электромагнитной энергий альфвеновской инерциальной волны убывают во времени по одному и тому же закону (2.31), (2.32).

7. С ростом времени в сдвиговом течении плазмы умеренного давления происходит рост частоты альфвеновской волны. На конечной стадии волна, которая начинала свое существование как кинетическая альфвеновская волна с дисперсией (2.41) и фазовой скоростью близкой к альфвеновской скорости, заканчивает свое распространение как волна с фазовой скоростью вдоль магнитного поля близкой к тепловой скорости электронов v_{Te} .

8. Показано, что классическая картина распространения пакета альфвеновских волн в плазме с умеренным давлением имеет место только на начальной стадии распространения пакета. Для больших времен компонента групповой скорости вдоль градиента сдвиговой скорости обращается в нуль и затем меняет знак – происходит блокирование и отражение пакета. Для предельно больших времен групповая скорость пакета вдоль магнитного поля становится равной тепловой скорости электронов, а компоненты групповой скорости поперек магнитного поля обращаются в нуль.

9. Исследована временная эволюция вынужденных колебаний в сдвиговом течении плазмы низкого и умеренного давлений при наличии альфвеновских волн. Получены соотношения, определяющие временную эволюцию электростатического и магнитного потенциалов колебаний, возникших в результате гармонического возмущения потенциалов на границе сдвигового течения и распространяющихся в плазме. Показано, что сдвиговое течение плазмы приводит к немодальной структуре не только «собственные» альфвеновские колебания, возникшие в результате

эволюции начальных возмущений, но и вынужденные.

10. В сдвиговом течении плазмы с горячими ионами немодальные эффекты определяют временную эволюцию гидродинамической дрейфово–альфвеновской и резистивной дрейфово–альфвеновской неустойчивостей уже на временных масштабах меньших, чем их обратный инкремент. Однако долговременная эволюция этих неустойчивостей, а также их насыщение определяются нелинейными эффектами, такими как нелинейный эффект усиленной декорреляции. Только в течении с сильным широм скорости, когда шир скорости становится больше частоты альфвеновской волны, линейные немодальные эффекты приводят к подавлению начальных возмущений за времена меньшие, чем обратные инкременты гидродинамической дрейфово–альфвеновской и резистивной дрейфово–альфвеновской неустойчивостей, предотвращая тем самым их развитие. Для плазмы с горячими ионами ($T_i \leq T_e$), частота электронной дрейфовой волны на конечном этапе эволюции приобретает частоту ионной дрейфовой волны, lv_{di} .

11. Определены условия подавления неустойчивости Рэлея–Тейлора в однородном сдвиговом течении плазмы. Показано, что подавление как линейных, так и слабонелинейных возмущений сдвиговым течением возникает когда возмущения становятся немодальными. При полученных условиях неустойчивость Рэлея–Тейлора может быть стабилизирована также благодаря эффекту усиленной нелинейной декорреляции. Полученные в Главе 4 результаты показывают, что в случае неустойчивости Рэлея–Тейлора эта теория должна быть построена на основе полученных немодальных решений.

В заключение хочу выразить благодарность своему научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору Азаренкову Н.А. за постановку задач, обсуждение результатов и постоянное внимание к работе.

Литература

- [1] Арцимович Л.А.// Замкнутые плазменные конфигурации.// Москва, Наука,– 1969
- [2] Кадомцев Б.Б.// Турбулентность плазмы.// Вопросы теории плазмы.–1964,– Вып.4,–с.188–339
- [3] Leiwer P.C.//Measurements of microturbulence in tokamaks and comparisons with theories of turbulence and anomalous transport// Nucl. Fusion.,–1985,– vol.**25**,–P.543–621
- [4] Wagner F., Becker G., Behringer K., Campbell D., and et. al.// Regime of improved confinement and high beta in neutral-beam-heated divertor discharges of the ASDEX tokamak// Phys.Rev. Lett.,–1982,–vol.**49**,–P.1408–1412
- [5] ASDEX Team// The H-mode of ASDEX// Nucl. Fusion,–1989,–vol.**29**,–P.1959–2040
- [6] Burrell K.H., Carlstrom T.N.,Doyle E.J., Gohil P, Groebner R.J., Lehechka T., Luhmann N.C., Matsumoto H., Osborne T.H. Peebles W.A., Philipona R. //Physics of the L to H transition in the DIII-D tokamak// Physics of Fluids,– 1991, vol.**B.2**,– P. 1406–1410
- [7] Ritz Ch.P., Bengtson Roger D., Levinson S.J., Powers E.J.// Turbulent structure in the edge plasma of the TEXT tokamak// Phys. Fluids,–1984,–vol.**27**,–P.2956–2959
- [8] Zohm H.//Edge localized modes (ELMs)// Plasma Physics and Controlled Fusion,–1996,–vol.**38**,–P. 105–128

- [9] Itoh S.-I., Itoh K., Fukuyama A. // Physics of edge plasmas in enhanced confinement modes // Journal of Nuclear Materials, - 1995, - vol. **220-222**, - P. 117-131
- [10] Amatucci W.E. // Inhomogeneous plasma flows: A review of in situ observations and laboratory experiments // Journal of Geophysical Research, - 1999, vol. **104**, - P. 14481-14503
- [11] Biglari H., Diamond P.H., Terry P.W. // Influence of sheared poloidal rotation on edge turbulence // Phys. Fluids, - 1990, - vol. **B2**, - P. 1-4
- [12] Burrell K.H. // Effects of $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ velocity shear and magnetic shear on turbulence and transport in magnetic confinement devices. // Phys. Plasmas, - 1997, vol. **4**, - P. 1499-1518
- [13] Zang Y.Z., Mahajan S.M. // Correlation theory of a two-dimensional plasma turbulence with shear flow. // Phys. Fluids, - 1993, - vol. **B5**, - P. 2000-2020
- [14] Zang Y.Z., Mahajan S.M. // Edge turbulence scaling with shear flow // Phys. Fluids, - 1992, - vol. **B5**, - P. 1385-1387
- [15] Waltz R.E., Kerbel G.D., Milovich J., Hammert G.W. // Toroidal gyro-Landau fluid model turbulence simulations in a nonlinear ballooning mode representation with radial modes // Physics of Plasmas, - 1994, - vol. **1**, - P. 2229
- [16] Case K.M. // Stability of inviscid plane Couette flow // Phys. Fluids, - 1960, vol. **3**, - P. 144-148 .
- [17] Дикий Л.А. // Устойчивость плоскопараллельных потоков идеальной жидкости // Доклады АН СССР // 1960, - т. **35**, - с. 1068
- [18] Дикий Л.А. // Устойчивость плоскопараллельных потоков неоднородной жидкости // Прикладная математика и механика // 1960, - т. **XXIV**, - с. 249
- [19] Тимофеев А.В. // О желобковых колебаниях разряженной плазмы при наличии некомпенсированного пространственного заряда // Журнал Технической физики, - 1966, - т. **36**, - с. 1787

- [20] Костин В.М., Тимофеев А.В.//Об устойчивости электростатического потока с градиентом скорости//Журнал экспериментальной и теоретической физики//1966,–т.**53**,–вып.4(10)
- [21] Тимофеев А.В.//Колебания неоднородных течений плазмы и жидкости//Успехи физических наук // 1970,–т.**102**,–с.195
- [22] Lord Kelvin, //Stability of fluid motion: rectilinear motion of viscous fluid between two parallel plates// Philos. Mag.//1887.,– vol.**24**, –P.188
- [23] Hartman R.J., //Wave propagation in a stratified shear flow// Journal of Fluid Mechanics//1975,–vol.**71**, –P.89–104
- [24] Yamagata T. //On the propagation of Rossby waves in a weak shear flow// Journal of the Meteorological Society of Japan// 1976,–vol.**54**,–P.126–128
- [25] Chagelishvili G.D., Chanishvili T.S., Khristov T.S., Lominadze J.G.//Phys.Rev.E, 1993,–vol.**47**, –P.366
- [26] Chagelishvili G.D., Rogava A.D., Tsiklauri D.//Compressible hydromagnetic shear flows with anisotropic thermal pressure: Nonmodal study of waves and instabilities// Physics of Plasmas, 1997, –vol.**4**, –P. 1182–1195
- [27] Rogava A.D., Chagelishvili G.D., Mahajan S.M.// Shear Langmuir vortex: An elementary mode of plasma collective behavior// Physical Review E// 1998,– vol.**57**,– P.7103–7110
- [28] Hasegawa A., Wakatani M.// Plasma edge turbulence// Phys. Rev. Lett.// 1983,– vol.**50**,– P.682–686
- [29] Trefethen L.N., Trefethen A.E., Reddy S.C., Driscoll T.A.// Hydrodynamic Stability Without Eigenvalues// Science// 1993,–vol.**261**,– P.578–584
- [30] Camargo S.J., Tippett M.K., Caldas I.L.// Transient growth mechanisms of resistive drift-waves// International Congress on Plasma Physics combined with the 25th European Physical Society Conference on Controlled Fusion and Plasma

Physics, Praga, June 29–July 3, 1998, Europhysics Conference Abstracts// Edited by P. Pavlo, CD ROM edition, (European Physical Society, Petit–Lang, 1998) //1998,–vol.**22C**, –P.2207,

- [31] V.S.Mikhailenko, V.V.Mikhailenko, and K.N.Stepanov//Initial-value problem solution for Hasegawa-Wakatani equations for plasma with radial electric field shear// IAEA Technical Committee Meeting on First Principle-Based Transport Theory, June 21–23, 1999, Kloster Seeon, Germany. Abstracts, IPP, 5/87. Max–Plank–Institut fur Plasma Physic.,P.16
- [32] V.S. Mikhailenko, V.V. Mikhailenko, and K.N. Stepanov//Temporal evolution of linear drift waves in a collisional plasma with shear flow// Phys.Plasmas, –2000, –vol.**7**, P.94–100
- [33] Михайленко В.В., Азаренков Н.А., Михайленко В.С.//Временная эволюция вынужденных возмущений дрейфовых волн и неустойчивости Рэля–Тейлора в плазме, содержащей сдвиговое течение//Вісник Харківського університету, серія Фізична "Ядра, частинки, поля"// 2002. – № 559, вип. 2 /18/, –с. 40–46
- [34] V.S.Mikhailenko, N.A.Azarenkov, V.V.Mikhailenko// Temporal evolution of waves and instabilities in plasma with shear flow//Problems of Atomic Science and technolgy. Series "Physics of Plasmas"// 2002, – N5, P.47–51,
- [35] Hasegawa A., Mima K. //Psevdo–three–dimensional turbulence in magnetized nonuniform plasma //Phys.Fluids, –1978,–vol.**21**, –P.87–89
- [36] W.Horton, T.Tajima, and T.Kamimura // Kelvin-Helmholtz instability and vortices in magnetized plasma// Phys. Fluids, –1987, –vol.**30**, –P.3485
- [37] Shukla P.K., Yu M.Y., Rahman H.U., Spatchek K.H.// Nonlinear convective motion in plasmas// –1984, –vol.**105**, –P.227–328
- [38] Ritz Ch.P., Begtson R.D., Levinson S.J., Powers E.J.//Turbulent strucure in the edge plasma of the TEXT tokamak.//Phys.Fluids,–1984, –vol.**27**, –P.2956–2959

- [39] Sorokovoy E.L., Grigor'eva L.I., Chechkin V.V., Volkov Ye.D., Sorokovoy Ye.L., Burchenko P.Ya., Tsybenko S.A., Lozin A.V., Litvinov A.P., Masuzaki S., Yamazaki K.// Characteristics of edge plasma turbulence in spontaneous change of confinement mode in the URAGAN-3M TORSATRON//Problems of Atomic Science and Technology, Series: "Plasma Physics". -2004, -No. 5, -P.6.
- [40] Kim Y.B., Diamond P.H., Biglari H.//Theory of resistivity-gradient-driven turbulence in a differentially rotating plasma// Physics of fluids,-1990, -vol.**B2**, -P.2143-2150
- [41] Scott B. //Three-dimensional computation of drift Alfvén turbulence// Plasma Physics and Controlled Fusion,- 1997, -vol.**39**, -P.1635-1668
- [42] Mattor N., Diamond P.H.// Drift wave propagation as a source of plasma edge turbulence: Slab theory //Phys. Plasmas, -1994,-vol.**1**, -P.4002-4013
- [43] Connor J.W., Hastie R.J., and Taylor J.B.//High mode number stability of an axisymmetric toroidal plasma// Proc.Roy.Soc.-1979,-vol.**A 365**, P.1
- [44] Hastie R.J., Hesketh K.W., Taylor G.B.// Shear damping of two-dimensional drift waves in a large-aspect-ratio tokamak// Nuclear Fusion, -1979,-vol.**19**,-P.1223-1233
- [45] Taylor J.B., Connor J.W., and Wilson H.R.//Structure and damping of toroidal drift waves (and their implications for anomalous transport)// Plasma Physics and Controlled Fusion, -1993,-vol.**35**, P.1063-1070
- [46] Taylor J.B., Wilson H.R., Connor J.W.//Structure of short-wavelength drift modes and transport in a toroidal plasma//Plasma Physics and Controlled Fusion, -1996,-vol.**38**,-P.243-250
- [47] Cooper W.A.//Balloning instabilities in tokamaks with sheared toroidal flows// Plasma Physics and Controlled Fusion,-1988,-vol.**30**, P.1805-1812
- [48] Hameiri E., Sung-Taek Chun// Stability of ballooning modes in a rotating plasma// Physical Review A//-1990, -vol.**41**,-P.1186-1189

- [49] Connor J.W. and Wilson H.R., Plasma Physics and Controlled Fusion, –2000,–vol.**42**, –P.R1 .
- [50] Taylor J.B., and Wilson H.R.//Plasma rotation and toroidal drift modes// Plasma Physics and Controlled Fusion//–1996,–vol.**38**,–P.1999–2009
- [51] Taylor J.B.// Influence of continuous spectrum on ballooning instabilities in plasmas with shear–flow// Phys.Plasmas//–1999,–vol.**6**,–P.2425–2429
- [52] Hazeltine R.D., Meiss J.D., "Plasma confinement" (Ser. Monographs "Frontiers in Physics"), Addison–Wesleys/ Publ.Company,–1992.
- [53] Horton W.// Nonlinear drift waves and transport in magnetized plasma// Physics Reports// –1990,–vol.**192**,–P.1–177
- [54] Mikhailenko V.S., Mikhailenko V.V., Heyn M., Mahajan S.M.//Temporal evolution of drift–Alfvén waves and instabilities in an inhomogeneous plasma with homogeneous shear flow// Physical Review E, –2002,–vol.**66**,–P.066409.1–066409.12
- [55] Freidberg J.P.//Ideal magnetohydrodynamics.//Plenum Press, New York,–1987
- [56] Азаренков Н.А, Михайленко В.В.//Временная эволюция несобственных альфвеновских волн в полуграниченном сдвиговом течении плазмы//"Вісник Харківського університету серія фізична "Ядра, частинки, поля"//2003 № 601, вип. 2 /22/ с.41–50
- [57] Azarenkov N.A., Mikhailenko V.V.// The temporal evolution of the forced low frequency perturbations of a plasma with shear flow// 10th International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Alushta (Crimea), Ukraine, September, 13–18, 2004, Book of Abstracts, Abstract 1–40, P.81
- [58] Mikhailovsky A.B., Electromagnetic Instabilities in an Inhomogeneous Plasma (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1992)

- [59] Ossakow S.L. //Spread F theories—A review//, J. Atmos. Terr. Phys.—1981,—vol.**43**,—P.437
- [60] Chandrasekhar S. //Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability//,(Int.Ser. Monographs on Physics)// Clarendon Press, Oxford,—1961
- [61] Miles J.W.//On the stability of heterogeneous shear flow // J. Fluid Mechanics,—1961,—vol.**10**,—P.496
- [62] Kuo H.L.//Perturbations of plane Couette flow in stratified fluid and origin of cloud streets// Phys. Fluids,—1963 —vol.**6**,—P.195
- [63] Guzdar P.N., Satyanarayana P., Hyba J.D. and Ossakow S.L.// Influence of velocity shear on the Rayleigh-Taylor instability// Geophysical Research Letters//—1982,—vol. **9**,—P.547
- [64] Chakrabarti N. and Spatschek K.N. //Rayleigh–Taylor modes in the presence of velocity shear and vortices// Journal of Plasma Physics,—1998,—vol.**59**, —P.737–750.
- [65] Bayly B.J.// Three–Dimensional Instability of elliptical Flow//Phys.Rev.Lett.,—1986,—vol.**57**,—P.2160–2163
- [66] Mikhailenko V.S., Mikhailenko V.V., Weiland J.//Rayleigh–Taylor instability in plasmas with shear flow// Bulletin of the American Physical Society,—2002,—vol.**46**,—P.334.
- [67] Mikhailenko V.S., Mikhailenko V.V., Weiland J.//Rayleigh–Taylor instability in plasmas with shear flow//Phys.Plasmas,—2002,—vol.**9**, —P.2891–2895
- [68] Hassam A.B. //Nonlinear stabilization of the Rayleigh–Taylor instability by external velocity shear//Physics of fluids//—1991,—vol.**B4**,—P.485–487